# EINE DYNAMISCHE THEORIE DES RISIKOS IM VERSICHERUNGSBEREICH

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
RAINER ERNST ZIMMERMANN
aus Berlin

1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544720_0026

# EINE DYNAMISCHE THEORIE DES RISIKOS IM VERSICHERUNGSBEREICH

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
RAINER ERNST ZIMMERMANN
aus Berlin

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1.Referent: Prof.Dr.G.Wünsche

2.Referent: Prof.Dr.H.Pachale

Tag der mündlichen Prüfung: 8.Juli 1977

Diese Arbeit ist meinen Eltern gewidmet,
ohne deren Unterstützung und Mühe sie nie
zustande gekommen wäre.

Danksagung

Meinen besonderen Dank möchte ich den Betreuern dieser Arbeit aussprechen: Den Gutachtern, Herrn Prof.Dr.G.Wünsche, der die Arbeit auch initiierte, und Herrn Prof.Dr.H.Pachale (beide Freie Universität Berlin), zudem Herrn Priv.-Doz.Dr.K.E.Hellwig (Technische Universität Berlin). Ihrer aller Bemühungen stellten für mich eine wertvolle Hilfe dar und trugen zur Klärung zahlreicher Fragen bei.

Für viele engagierte Diskussionen über die differentialtopologische Problematik möchte ich an dieser Stelle auch den Teilnehmern der Arbeitsgemeinschaft für Globale Analysis danken, es sind dies Olivier Brison, Robert Jaroslawski und Ulrich Wodarzik. Dieter Nain danke ich für eine sehr informative Diskussion der praktischen Belange des Versicherungsgeschäftes.

Insbesondere möchte ich mich auch bei Herrn Prof.Dr.B.Wende (Physikalisch Technische Bundesanstalt Berlin) für das Verständnis bedanken, das er der Durchführung dieser Dissertation entgegenbrachte.

Zeit und Raum sind Bereiche,
in denen wir denken
und nicht Bedingungen,
unter denen wir leben.

Albert Einstein

Der wahre Grund für die Eigenschaften
der Dinge liegt in ihrer Teilnahme
an den Ideen.

Platon

English Abstract:

EXTRACTION OF A DYNAMICAL THEORY OF RISK
FROM MATHEMATICAL PHYSICS

(Paper presented to the "Speaker's Corner Talks" of the 13th ASTIN Colloquium 1977 in Washington D.C.)

Dear Mr. Chairman,
Ladies and Gentlemen.

In this talk I would like to outline a model of Risk theory which uses methods of Global Analysis and Differential Geometry and Topology, fields of modern Mathematics which have aroused much interest during the last decade or so in a variety of fields of science. Some standart literature on this is indicated at the final page of the paper of which you received a copy.

The model represents the simplest possible approach to Risk theory in so far it bases on Riemannian geometry which is well-explored up to now in Mathematical Physics. It is attempted to describe the qualitative behaviour of insurance processes so as to shed some new light on the present classical theories on the one hand, and in order to open up new perspectives for global consequences concerning insurance processes on the other.

(1) It is assumed that persons, on whose economical behaviour insurance companies have to rely, develop in some abstract insurance space to be specified. This shall be some intuitively introduced space with certain kinematical and dynamical features. If a person is localized at a certain point in insurance space, we say that this person occupies a certain <u>state</u> which is represented locally by an n-tupel of real numbers, called the <u>coordinates</u> of this state.

The idea is to make this space into a differentiable manifold admitting a Riemannian structure. The situation can be visualized in a simplified manner as follows:

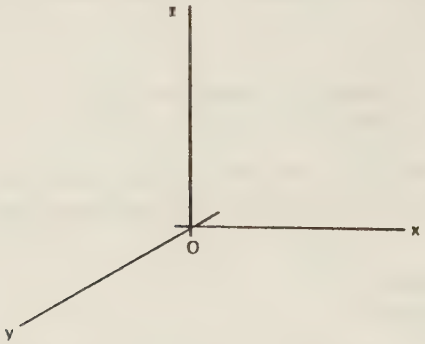



Fig.1: Flat space (with Cartesian coordinates), three insurances being selected (Object, Accident, Motor Car), the time coordinate being suppressed. The line-element is given by $ds^2 = A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2$, where the A,B,C are functions of the x,y,z. Any point on one of the axes indicates some claim in the appropriate insurance.

Let us make this more precise by

Axiom 1: The insurance manifold is a pair (I,g), where I is a differentiable manifold and g is a Lorentz metric on I. That is, $g \in \mathrm{Riem}(I)$, non-degenerate and sign $g = -(n-1)$, whenever I has dimension n.

As convention we choose (I,g) in the following way:
Convention: (I,g) shall be connected, without boundary, $C^\infty$, and Hausdorff. Then we have an immediate

Corollary: (I,g) is paracompact. It is also time (and "space") orientable.

Moreover, we have to incorporate the stochastic nature of insurance processes. Commonly, a process is defined as a curve on I, a person's trajectory (over time), or her insurance history.

In some prescribed coordinates, a Riemannian line-element looks like $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$, where the $g_{ik}$ are the metric (tensor) components and $i,k = 0,1,\ldots,n-1$, if we choose the time component to be the zeroth one. In fact, the $g_{ik}$ are nothing but matrix elements consisting of functions which describe the evolution of claims for some person. The $g_{ik}$ determine a Riemannian connection on I. And the $g_{ik}$ are stochastic in the following manner: There is a probability space W with space of elementary events $\Omega$ (space of all possible metrics) with $\sigma$-Algebra $\Sigma$ and measure P together with a mapping

$$\varphi : R \times \Omega \xrightarrow{\text{measurable}} \text{Riem(I)}$$

which makes the occurrence of the $g_{ik}$'s into a stochastic process. That is, Riem(I) is separable and

$$\bigwedge_{\mathscr{C} \subset \text{Riem(I)}} \varphi^{-1}(\mathscr{C}) \subset \Sigma\left(\Omega\right) \quad ,$$

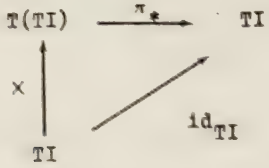
where $\mathscr{C}$ are open sets of Riem(I) in the appropriate topology. Then we can speak of a distribution for the metric components, say $F(g_{ik})$, for instance of Gaussian kind with density

$$f(g_{ik}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\omega} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(g^{o}_{ik} - g_{ik})^2}{\omega} \right\} \quad ,$$

where $\omega$ means a variance. Here the $g^{o}_{ik}$ are the metric components at the time of entry of some person into the company's domain (the initial metric). They are determined by the conditions of entry of a person. Obviously, if $g_{ik}$ equal $g^{o}_{ik}$ for all times, then the probability of the metric equals one.

The idea to pursue is as follows: Start off at time $t_o$ with initial metric $g^o$ and associated line-element. Then compute the future g's for any $t > t_o$ due to the appropriate distribution.

Then there is also a stochastic spray X on TI, the tangent bundle over I, that is a vector field which determines an ordinary differential equation of second order on I, and which makes the following diagram commute:




Here $\pi_*$ means the canonical projection. Solutions of the differential equation on I (integral curves of X on TI, transferred on I by the mapping exp: $\Gamma \subset TI \longrightarrow I$, $\Gamma$ open in TI) are called geodesics. The latter are extremal curves in a sense, for they can be obtained by a variational principle $\delta \int ds = 0$. Is $\nabla$ the Riemannian connection on I, then locally the geodesics take the form

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j \quad k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad ,$$

with i,j,k as usual, and where $x^i(s)$ are coordinates of the curve $\lambda(s)$ over I, and s is an affine (curve) parameter. Geodesics are said to be timelike, null, or spacelike according to whether $ds > 0$, $= 0$, $< 0$. The causal cone on I is the set of all piecewise timelike curves which are future-or past directed. Null curves (geodesics) form the boundary of the causal cone. The connection components $\left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{matrix} \right\}$ are stochastic, for they depend on the $g_{ik}$'s.

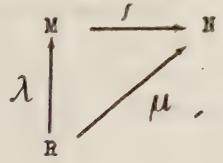
We formulate the following:

Axiom 2: (insurance inertia) Free persons move on geodesics. That is, persons on geodesics over I do only depend on their own unperturbed opinion (which is also stochastic of course). Interactions will perturb this (see below).

(2) It is possible now to introduce the notion of singularities on I via a certain incompleteness criterion for geodesics on I. A process is said to be singular then, if there is a singular geodesic (this will perturb the economical prognostics of a company so that such singularities should be recognized in time and be avoided by some appropriate strategy). We call a geodesic incomplete, if it is not possible to prolong it to arbitrary values of it's affine parameter. This means that the insurance history stops at some point. We have this case, if certain generic properties hold on I, and if a trapped surface forms, i.e. a spacelike surface S which is said to be trapped, if the family of null geodesics orthogonal to S converges at S. One can show that the condition of convergence holds generically on I: The presence of persons alone leads to convergence of geodesics. This is an important consequence, because it means that persons determine their own geometry in a neighborhood of their state.

One can also show that at the boundary of a trapped surface, at the socalled event horizon, the causal cone on I turns over (after exit a person is not localizable).

Another kind of singularities arises in connection with transitions, these are mappings $f: M \to N$, M, N submanifolds of I, such that the following diagram commutes:



where $\lambda, \mu$ are curves on M,N respectively, and for $q \in M$ and $p \in N$: $\lambda(q) = \mu(p)$ (trivial). Explain then $J^k(M,N)$ to be the set of equivalence classes of mappings $f$ such that two transitions $f_1$ and $f_2$ are said to be equivalent iff their tangentials are equal up to order k. Then we call an element of $J^k(M,N)$ a k-Jet. Singularities of type $S_r$ (in the sense of René Thom) are given then by

$$S_r := \left\{ g \in J^1 \mid \operatorname{corank} g = r \right\},$$

i.e. if $g$ drops rank by r at $q \in M$, then there is a singularity at q of order r. This has natural relations to Morse theory and Catastrophe theory and gives rise to future explorations into this subject with respect to these fields.

(3) A short remark on interactions of persons: These can be incorporated into the model assuming that Maxwell's principle holds on I and that additionally

Axiom 3: The full set of Maxwell's equations holds on I locally, and so do Einstein's field equations.

Then, if $F$ is the tensor of interactions between persons on I and $R$ the Ricci (curvature) tensor (of interactions of persons with the surrounding geometry), there is a relation $F = G(R)$ such that interactions can be interpreted as intrinsic aspect of the underlying geometry of I.

(4) The conclusion now is the following: By their definition the $g_{ik}$'s determine the capital function K for a process at any point of time, and K itself determines the probability of ruin. The meaning of ruin is generalized here being extended to all domains of risk (in particular also to insurances of the Life domain). On the other hand, singularities are due to special $g_{ik}$'s (and K's) making the geodesics incomplete which increase the probability of ruin.

The following diagram represents these relations schematically:

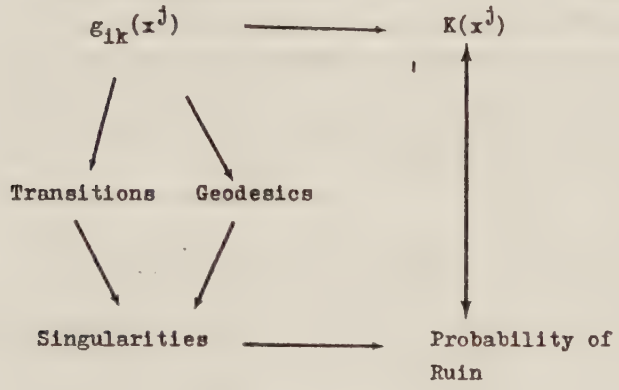



Fig 2: The problem of stability (shall lead to specific strategies)

The intention of this model is to eventually clarify the qualitative behaviour of insurance processes in the sense of René Thom (Catastrophe Theory): Global properties of insurance processes on a manifold are considered. The study of their singularities (the catastrophe set on I) shall give some deeper insight into the circumstances of origin, evolution, and structure of such catastrophes and the possibilities to overcome them and to introduce stability.

Thank you very much for your attention.

Short List of References:

Dieudonné,J.: Grundzüge der modernen Analysis (Bde. 1-4) Vieweg 1976

Souriau,J.-M.: Structure des Systèmes Dynamiques Dunod (Paris) 1970

Abraham,R.+Marsden,J.E.: Foundations of Mechanics Benjamin 1967

Kobayashi,S.+Nomizu,K.: Foundations of Differential Geometry, Interscience 1963

Thom,R.: Structural Stability and Morphogenesis Benjamin 1975

Hawking,S.+Ellis,G.F.R.: Large Scale Structure of Space Time, Cambridge University Press 1973

Beckmann,M.J.+Sato,R.: (ed) Mathematische Wirtschaftstheorie Kiepenheuer und Witsch 1975

Dierker,E.: Topological Methods in Walrasian Economics LNEMS 92 Springer 1974

Smale,S.: Global Analysis and Economics ,in: Dynamical Systems (ed. Peixoto) ,Academic Press 1973

Kuhn,H.W.+Szegö,G.P.: (ed) Mathematical Systems Theory and Economics (vols.1,2), LNORME 11,12 Springer 1969

Einführung

(Historischer Abriß und Zusammenfassung )

Seit dem ersten ausführlichen Bericht über Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der Risikotheorie in einer Adresse von C.Philipson an den ASTIN in New York, veröffentlicht im Oktober 1958 [ 38 ] ,wurde die Risikotheorie im Versicherungsbereich intensiv erweitert, insbesondere fanden weite Teile der Theorie der stochastischen Prozesse in ihr Niederschlag [ 40,42,51,55, 62,66 (Philipson) und 60,67-9,73 ] . Man bemühte sich zudem,den Begriff des Risikos zu verallgemeinern,z.B. in den Bereich der Lebensversicherung einzubeziehen. Ferner fanden auch Ergebnisse der Operations Research und ähnlicher wirtschaftstheoretischer Gebiete Eingang in die Theorie [ 41,43,56,63-4,71-2,79,83 ] .

Doch nach wie vor war man in erster Linie an der Erstellung von Rechnungsgrundlagen interessiert [ 52,57,75,77 ]. Dadurch blieben die potentiellen Möglichkeiten einer mehr qualitativen globalen Theorie der Versicherungsprozesse weitgehend verborgen,was auch im wesentlichen entwicklungstheoretisch zu sehen ist und teilweise auf der Schwierigkeit der interdisziplinären Kommunikation beruhte. Die Gebiete der modernen Mathematik,wie etwa Differentialtopologie und Funktionalanalysis,wurden erst in neuester Zeit auf ihren hohen Entwicklungsstand gebracht und dadurch breiteren Kreisen der Mathematik zugänglich. Selbst noch weitgehend unformalisierte Bereiche der Wissenschaften,wie beispielsweise die Psychologie,werden langsam in diesen Gang der Entwicklung einbezogen.

Es hat sich nämlich gezeigt,daß,ähnlich,wie die enorme Weiterentwicklung der EDV-Möglichkeiten zur Erschließung neuerer expliciter Lösungsmethoden schwierigster Gleichungskomplexe führte,auch eine allgemeine Theorie der Modelle,die allgemeinste dynamische Prozesse

unabhängig von ihren Anwendungsbereichen diskutiert auf ebenso allgemeinen Mengenstrukturen, eben den Mannigfaltigkeiten, Domainen für die klassische Theorie eröffnete, von denen man sich zuvor keinerlei Hilfe erhofft hätte.

Mit Ausnahme einiger spektakulärer Ergebnisse (überwiegend aus Relativität [23] und Biologie [3,5]) steht diese Theorie jedoch erst am Anfang ihrer Entwicklung, und das gesamte Potential ihres Nutzeffektes ist gegenwärtig keineswegs absehbar. Die Annäherung an den gesamten Komplex der unterliegenden Problematik erfolgt wie stets in der Angewandten Mathematik auf dem Weg vom Einfachen zum Schwierigeren, deshalb wurden auch bisher überwiegend Modelle betrachtet, die aufgrund ihrer Einfachheit wenig realistisch sind, jedoch im allgemeinen guten Näherungen entsprechen. Zudem weiß man z.B. aus der Physik, daß auch einfache Modelle ganz überraschend gute Beschreibungen hervorbringen können, die neue Einblicke in die Thematik eröffnen und innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches völlig hinreichend sind.

Für die Risikotheorie im Versicherungsbereich stellt die vorliegende Dissertation ein ähnliches Unterfangen dar. Das Ziel ist, die klassische Risikotheorie an moderne Techniken aus der differentialtopologischen Dynamik heranzuführen und Versicherungsprozesse einer vertieften mathematischen Erfassung im oben diskutierten Sinne zugänglich zu machen.

In der Arbeit werden Methoden aus Differentialgeometrie und Topologie benutzt, die dazu beitragen sollen, neues Licht auf die bekannten Aspekte der Theorie zu werfen, so daß neue Perspektiven eröffnet werden, die es gestatten, Aussagen über globale Konsequenzen von Versicherungsprozessen zu machen.

Es wird im Rahmen dieses Konzeptes angenommen, daß sich Personen, nach deren ökonomisches Verhalten sich eine Versicherungsgesellschaft richten muß, in einem, näher zu

beschreibenen,abstrakten Versicherungsraum entwickeln. Dieses soll zunächst ein intuitiv eingeführter Raum sein,mit gewissen kinematischen und dynamischen Eigenschaften. Wird eine Person an irgendeinem Punkt des Versicherungsraumes lokalisiert,so sagen wir,die Person nehme einen Zustand ein,der lokal durch ein n-tupel reeller Zahlen dargestellt wird,den Koordinaten des Zustandes. Die Idee ist nun,diesen Versicherungsraum zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu machen, die eine Riemannsche Struktur besitzt. Wählen wir als Beispiel einen (flachen) Raum in kartesischen Koordinaten dargestellt,dann gibt es ein Linienelement in unserem Sinne,der Art $ds^2 = A\,dx^2 + \ldots + B\,dy^2$, wobei wir die Zeitkoordinate unterdrückt haben und x,y n Versicherungen bedeuten,die eine Person bei einer Gesellschaft abschließen kann. Die A,B sind dann irgendwelche Funktionen der Koordinaten,die die Geometrie des Raumes näher bestimmen. Im flachen Raum sind A,B insbesondere konstant.

Wir wollen den Grundgedanken etwas exakter formulieren:

Axiom 1: Die Versicherungsmannigfaltigkeit I ist ein Paar (I',g),wobei I' eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bedeutet und g eine Lorentz Metrik auf I'. Das heißt, $g \in Riem(I)$,nichtentartet und sign g = -(n-1), wenn immer I n-dimensional ist.

Als Konvention verabreden wir,daß I zusammenhängend, ohne Rand,glatt und Hausdorff sein soll. Dann haben wir sofort das folgende Korollar:

Korollar: Es ist I parakompakt. Zudem ist I zeit-(und raum-) orientierbar.

Zudem muß noch der stochastische Charakter der Versicherungsprozesse berücksichtigt werden. Wir verstehen dabei unter einem Prozeß eine Kurve (Personentrajektorie) auf I (die Versicherungsgeschichte einer Person). Ein Riemannsches Linienelement (für allgemeine nicht-flache Räume) hat die Form $ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ in Koordinaten,

wobei die $g_{ik}$ die metrischen (Tensor-) Komponenten sind und i,k = 0,1,...,n-1 (wenn die Zeitkoordinate als $x_0$ gesetzt wird). In der Tat sind die $g_{ik}$ nichts weiter als eine Matrix,die aus Funktionen der Koordinaten besteht (in denen wiederum Versicherungshöhen explicit eingehen). Die $g_{ik}$ bestimmen eine Riemannsche Konnektion auf I und sind stochastisch auf folgende Weise: Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum W (mit Raum der elementaren Ereignisse $\Omega$ , $\sigma$ -Algebra $\sum$ und Maß P) zusammen mit einer meßbaren Abbildung $\varphi$ von $\Omega$ x R auf Riem(I),die das Ereignis "$g_{ik}$" zum stochastischen Prozeß macht. Dann macht es Sinn,von Verteilung der $g_{ik}$ zu sprechen. Man verfährt dann wie folgt: Der Prozeß beginnt mit der bekannten Anfangsmetrik $g^0$. Dann kann man künftige Metriken g (für alle $t > t_0$) entsprechend der vorgegebenen Verteilung bestimmen. Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit für eine Metrik zum Zeitpunkt t, $P(g_{ik})$,gerade dann Eins,falls $g^0 = g$ für alle Zeiten.

Es gibt dann auch einen stochastischen Spray auf I im folgenden Sinne: Ist X ein Schnitt auf TI (in T(TI)), so führt die natürliche Projektion von T(TI) auf TI zur Kommutation eines Diagrammes,aus dem sich die Definition des Sprays (Vektorfeld X) ableist. Lösungen der zugehörigen Integralkurven können mittels der Exponentialabbildung auf I zurückgetragen werden und liefern die bekannten Gleichungen der Geodätischen.

Ist eine Riemannsche Konnektion auf I gegeben,so bestimmt man die Geodätischen lokal in der Form

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 ,$$

wobei $x^i(s)$ Koordinaten einer Kurve über I (der Geodätischen eben) sind mit affinem Parameter s und die $\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\}$ Komponenten der Konnektion (die stochastisch ist, da sie von den $g_{ik}$ abhängt). Geodätische heißen zeitartig,Null oder raumartig,je nachdem $ds > 0, = 0$ oder $< 0$. Der kausale Kegel auf I ist die Menge aller stückweise zeitartigen Kurven (nicht notwendig geodätisch),die

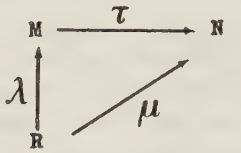
zukunfts-oder vergangenheitsgerichtet sind. Nullgeodätische bilden den Rand des kausalen Kegels. Wir formulieren jetzt das

Axiom 2: (Versicherungsträgheit) Freie Personen bewegen sich über Geodätische auf I. Das heißt,Personen auf Geodätischen unterliegen lediglich ihrer eigenen (ungestörten) Entscheidung (die ebenfalls stochastischer Natur ist). Wechselwirkungen werden hier zu Störungen führen (siehe später).

Man kann jetzt den Begriff der Singularität auf I einführen über ein Unvollständigkeitskriterium für Geodätische auf I. Ein Prozeß heißt dann singulär,falls es singuläre Geodätische gibt,das heißt,falls es unvollständige Geodätische gibt. Ist dieses der Fall,so wird die Planung der Gesellschaft gestört. Deshalb muß das Ziel sein;Singularitäten dieser Art vorher rechtzeitig zu erkennen und Strategien zu entwickeln, diese Störungen zu vermeiden. Es heißt eine Geodätische unvollständig,falls es nicht möglich ist,sie bis auf beliebige Werte ihres affinen Parameters auszudehnen. Das heißt,es gibt einen Punkt,von dem an die Versicherungsgeschichte einer Person abbricht. Gelten gewisse generische Bedingungen auf I und bildet sich insbesondere eine (abgeschlossene) eingefangene Fläche auf I, so gibt es eine Singularität auf I. Eine Fläche heißt eingefangen,falls die Familie zu ihr orthogonaler Nullgeodätischer bei ihr rekonvergiert. Man kann zeigen, daß die Konvergenzbedingung generisch auf I gilt: Allein die Anwesenheit von Personen auf I bewirkt die Konvergenz von Geodätischen. Dies ist eine wichtige Konsequenz, denn sie bedeutet,daß Personen lokal ihre eigene Geometrie bestimmen. Schließlich kann man noch zeigen, daß der kausale Kegel am Rand einer eingefangenen Fläche umklappt (das heißt,nach dem Austritt ist eine Person nicht mehr lokalisierbar).

Eine andere Art von Singularitäten ergibt sich auf die folgende Weise: Seien M,N Untermannigfaltigkeiten von I

und seien Transitionen definiert als Abbildungen von M nach N, so daß das folgende Diagramm kommutiert




wenn immer $\lambda, \mu$ Kurven auf M bzw. N sind. Solche Bewegungen einer Person über I werden möglich, falls eine gesamte Versicherungskonfiguration abgeworfen wird und eine völlig neue angenommen. Dann sei $J^k(M,N)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Abbildungen $\tau$, so daß zwei Transitionen einander äquivalent heißen, falls ihre Tangentiale gleich sind bis zur Ordnung k. Singularitäten (im Thomschen Sinne) vom Typ $S_r$ sind dann definiert als Menge $S_r := \{ \sigma \in J^1 \mid \text{Korang}\,\sigma = r \}$. Bei $q \in M$ gibt es also eine Singularität, falls dort $\sigma$ im Rang um r fällt. Hierbei gibt es jetzt natürliche Anknüpfungspunkte an Morse Theorie und Katastrophentheorie, und es wird wünschenswert sein, das Modell künftig auf diese weiten Gebiete der modernen Mathematik ausdehnen zu können.

Eine kurze Bemerkung zu den Wechselwirkungen: Man kann sie berücksichtigen, indem man Maxwell's Prinzip auf I zuläßt und das

Axiom 3: Die Feldgleichungen von Einstein und Maxwell gelten auf I.

Ist dann $\mathscr{A}$ der Tensor der Wechselwirkungen zwischen Personen und ist $\mathscr{R}$ der Ricci (Krümmungs-) Tensor (der Wechselwirkungen zwischen Personen und der unterliegenden Geometrie), so gibt es eine Beziehung zwischen beiden derart, daß man Wechselwirkungen interpretieren kann als intrinsischen Aspekt der Geometrie. Das heißt, der Tensor der Wechselwirkungen dient nur als rechnerische Hilfsgröße zur Reduktion von (geometrischen) Feldgleichungen, führt selbst aber keine zusätzliche

Qualität auf I ein.

Durch ihre Definition bestimmen die $g_{ik}$ die Kapitelfunktion eines Prozesses (die ihrerseits die Ruinwahrscheinlichkeit bestimmt). Durch geometrische Überlegungen gelangt man zu Aussagen über Singularitäten von Geodätischen (oder Transitionen). Das heißt,die Untersuchung einer Metrik wird Aufschlüsse geben über eventuelle Pathologien eines Prozesses (und somit Ausblicke auf die gesamte Kapitalentwicklung einer Gesellschaft zulassen). Aus Wahrscheinlichkeiten für Singularitäten ergibt sich die Ruinwahrscheinlichkeit.

Alle diese Betrachtungen führen in letzter Konsequenz zu einer dynamischen Formulierung der Entscheidungstheorie. Dabei handelt es sich jetzt um allgemeinste Entscheidungsprozesse (nicht nur der Gesellschaft im operativen (ökonomischen) Sinne,sondern auch der einzelnen Person auf I),die mithin zu einem mathematischen Ansatz zur Behandlung psychologischer Strukturen führen,die das Wirtschaftsverhalten von Personen steuern.

Die Intention dieses Modells ist,das qualitative Verhalten der oben diskutierten Prozesse einer vertieften mathematischen Betrachtungsweise zugänglich zu machen,ganz im Sinne von René Thom: Globale Eigenschaften von Versicherungsprozessen auf Mannigfaltigkeiten werden untersucht. Das Studium ihrer Pathologien (der Katastrophenmenge auf I) soll eine Einsicht liefern in die Umstände der Entstehung, der Evolution und der Struktur solcher Katastrophen und in die Möglichkeiten,sie zu überwinden und Stabilität einzuführen.

Dabei kann die vorliegende Dissertation nur einen ersten Unterbau der grundlegenden Konzepte bieten, keineswegs aber ultima ratio für die angesprochene Problematik sein. Vielmehr werden Ansätze aufgezeigt, die in Zukunft vielleicht zu komplexeren (und deshalb realeren) Modellen führen.

Technisches Postskriptum

Die Arbeit wurde mit einem bewußt etwas ausführlicher gehaltenen Teil über die Grundlagen aus Differentialgeometrie und Topologie begonnen,um einen möglichst unmittelbaren Einstieg in die unterliegenden Konzepte zu ermöglichen. Aus Platzgründen kann dieses Kapitel nicht vollständig sein,jedoch sollten die Hinweise auf die Standartliteratur von Nutzen sein.

Neben dieser Einführung und dem englischen Abstract schließt sich ein Übersichtsdiagramm an,das eine Einordnung der einzelnen Sektionen in den mathematischen Hintergrund ermöglichen soll. Dabei sollen auch Zusammenhänge der Anwendungsgebiete aufgezeigt werden. Es folgt dann noch ein kurzes Verzeichnis der Symbolik, in sofern sie vom allgemeinen Standart abweicht.

Das erste Kapitel entwickelt das Modell von Versicherungsprozessen auf Mannigfaltigkeiten. Das zweite Kapitel diskutiert Wechselwirkungen von Personen, das dritte widmet sich einer Betrachtung des rein Riemannschen Teils der Katastrophentheorie des Risikos. Die Aspekte der Thomschen Theorie sind nur angedeutet, und der allgemeine Stabilitätsbegriff ist andiskutiert. Im übrigen ist angestrebt,die zukünftige Arbeit einer Behandlung von Versicherungsprozessen unter Aspekten neuerer Art (etwa unter ausführlicherer Einbeziehung von Morse Theorie) zu widmen.

Zwei Anhänge ergänzen Gesichtspunkte,deren ausführliche Behandlung im Rahmen dieser Arbeit zu weit geführt hätte. Es schließen sich das Literaturverzeichnis und der Lebenslauf des Autoren an.

Inhaltsverzeichnis

English Abstract (paper submitted
to 13th ASTIN Colloquium 1977 in
Washington D.C.)

Einführung
Inhaltsverzeichnis
Übersicht über die Symbolik

(0) Einführung in die Grundlagen

0.1 Mannigfaltigkeiten
0.2 Abbildungen
0.3 Vektoren und Tensoren
0.4 Differentialformen
0.5 Metrik und Zusammenhang
(Riemannsche Geometrie)

(1) Versicherungsprozesse auf
Mannigfaltigkeiten

1.1 Die Versicherungsmannigfaltigkeit I
und ihre Eigenschaften
1.2 Versicherungsprozesse auf I
1.3 Stochastische Dynamik
1.4 Transitionen als Abbildungen
zwischen Mannigfaltigkeiten

(2) Wechselwirkungen zwischen Personen

2.1 Eine Feldformulierung der
Wechselwirkungen
2.2 Eine vereinigte Darstellung

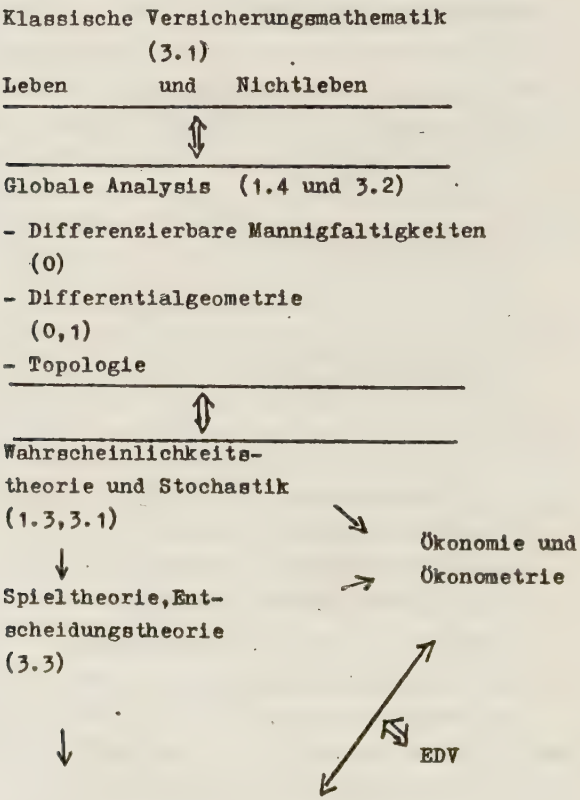
(3) Eine Katastrophentheorie des Risikos

3.1 Das Konzept der Ruinwahrscheinlichkeit
3.2 Pathologien von Versicherungsprozessen
3.3 Bemerkungen über den Wettbewerb
3.4 Ränder und lokale und globale Strategien

Anhänge und Literaturnachweise

Übersichtsdiagramm

Es geben die Ziffern die Sektionen an,die mit dem genannten Themenkreis in Zusammenhang stehen,die induzierenden Richtungen sollen die Anwendungsweise andeuten.



Übersicht über die Symbole

Es sind nur die Symbole aufgelistet,von denen angenommen werden muß,daß sie nicht allgemein bekannt sind. Die Symbolik und Nomenklatur richten sich im wesentlichen nach Dieudonné [20] und Thom [3] und auch Hawking-Ellis [23] . Es bedeutet insbesondere "iff" (if and only if): dann und nur dann,wenn. Ausdrücke wie Hamiltonian,Jacobian etc. sind dem angelsächsichen Gebrauch entnommen,weil anzunehmen ist,daß sie sich auch hier auf diese Weise eingebürgert haben. Kanonisch und generisch werden fast synonym im Sinne von "natürlich" benutzt,wie auch dem Text explicit zu entnehmen. Sollte Gegenteiliges nicht ausdrücklich vermerkt sein,so wird im gesamten Text die Einsteinsche Summenkonvention benutzt: Über mehrfach auftretende Indizes wird stets summiert. Abkürzungen,die sich entsprechend eingebürgert haben in der kategoriellen Schreibweise,wie Diff(M),Hom(M) und ähnliche (Diffeomorphismen von M,Homomorphismen von M) können leicht dem Textzusammenhang entnommen werden und sind oft suggestiv eingesetzt. Allgemein laufen Vektor-Tensor-Indizes meist für i,k,... von 0 bis n-1,griechische Indizes von 1 bis n-1. Ferner sind die folgenden Konventionen zu vermerken:

Ableitungen sind

| | |
|---|---|
| d/dt,d/ds oder "." | nach einem Parameter,gewöhnlich dem der Kurve |
| d | äußere Ableitung oder totales Differential (kann nicht verwechselt werden) |
| $\nabla^M, D^M$ | Operatorableitungen,wie n-Gradienten,n-Divergenzen etc. |
| $D^2$ | der Hessian |
| $\pounds$ , $\nabla$ | die Lie-Ableitung,die kovariante Ableitung (auch ; ) |

Klammern geben an

| | |
|---|---|
| $[\,,\,]$ | den Kommutator als Lie-Ableitung von Vektorfeldern |
| $\langle\,,\,\rangle$ | das Skalarprodukt |
| $\{\,,\,\}$ | Mengen in expliciter Form oder Christoffelsymbole |

Mengenoperationen unterliegen der Quantorenschreibweise

| | |
|---|---|
| $\bigwedge_{x\in M}$ , $\forall x \in M$ | für alle $x \in M$ synonym |
| $[k]$ | Äquivalenzklassen $k$ |
| $\approx$ | Isomorphismus (Isomorphie) |
| $\sim$ | Äquivalenz |
| $\varsigma \circ g = g^* \varsigma$ | Komposition oder Pull-back |
| $\pitchfork$ | Transversalität |

Ferner steht $\exists$ ('wång) für die Menge (Kategorie) der Versicherungsprozesse, für Funktionenräume wird die übliche Schreibweise verwendet, zum Beispiel $C^k(M,N)$ für den Raum aller $C^k$-Abbildungen von M nach N. Nach Halmos kennzeichnet $\square$ des Ende eines Beweises (auch, wenn dieser nur mit einem Zitat belegt ist).

## (0) Einführung in die Grundlagen

Dieses einführende Kapitel soll die Mittel der modernen Analysis bereitstellen, die künftig benötigt werden. Dem Leser soll dabei ein Überblick über die unterligenden Konzepte eines Gebietes vermittelt werden, das in den letzten Jahren immer stärker an Bedeutung gewonnen hat, für alle Bereiche der Naturwissenschaften, aber auch für die Sozial-und Wirtschaftswissenschaften und sogar für die Psychologie.

Dieser Abriß kann nur einen kurzen Überblick darstellen, der keineswegs vollständig sein soll, insbesondere sind Beweise zu den Theoremen und Lemmata ausgelassen. Sie sind in der entsprechenden Standartliteratur zu finden. Hierzu zählen besonders die Werke von Brickell-Clark [1], Souriau [19], Abraham-Marsden [12], Kobayashi-Nomizu [18], Hawking-Ellis [23] und vor allem auch Dieudonné [20].

### 0.1 Mannigfaltigkeiten

0.1.1 Sei $M'$ eine Menge. Eine lokale Karte auf $M'$ ist ein Paar $(U, \phi)$, wobei $U$ eine Untermenge von $M'$ ist und $\phi$ eine Bijektion von $U$ auf eine offene Untermenge des $E^{n+}$). Ein Atlas $A$ auf $M'$ ist eine Familie von Karten $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, so daß

$$M' = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

und, falls $U_\alpha \cap U_\beta$ nichtleer ist, die Überlappungsabbildung $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine $C^r$-Abbildung offener Untermengen des $E^n$ ist$^{++}$).

---

$^{+}$) Künftig werden $R^n$ und $E^n$ synonym benutzt. Man beachte dabei, daß die Metriken, die die jeweiligen Topologien induzieren, gegeben sind durch $d = \max \| x_i - y_i \|$ bzw. $d = \left( \sum_i (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$, für $x_i, y_i \in R^n$.

$^{++}$) Jedes $U_\alpha$ ist eine lokale Koordinatenumgebung, so daß $p \in M$ die Koordinaten $\phi_\alpha(p)$ im $E^n$ hat.

0.1.2 Zwei Atlanten $\underline{A}, \underline{B}$ heißen kompatibel, falls $\underline{A} \cup \underline{B}$ wieder ein Atlas ist. Es ist "kompatibel" eine Äquivalenzrelation auf M'. Eine differenzierbare Struktur S auf M' ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten auf M'. Die Vereinigung der Atlanten in S ist der maximale Atlas von S, eine Karte hieraus heißt zulässige Karte.

0.1.3 Eine $C^r$-Mannigfaltigkeit M ist ein Paar (M',S), wobei M' eine Menge ist und S eine differenzierbare Struktur auf M'.

0.1.4 Eine Mannigfaltigkeit M ist n-dimensional, iff für jeden Punkt $p \in M$ eine zulässige Karte existiert, $(U, \phi)$, mit $p \in U$ und $\phi(U) \subset E^n$.

0.1.5 In der Zukunft sei verabredet, daß M stets $C^\infty$, n-dimensional, ohne Rand und Hausdorff+) ist, falls nicht ausdrücklich Anderes vermerkt ist.

0.1.6 Ein Atlas auf M heißt lokal endlich, falls jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die nur eine endliche Anzahl der $U_\alpha$ schneidet. Gibt es zu jedem Atlas $|U_\alpha, \phi_\alpha|$ einen lokal endlichen der Form $|V_\beta, \psi_\beta|$ mit $V_\beta \subset U_\alpha$, so heißt M parakompakt.

0.1.7 Theorem (Kobayashi-Nomizu): Eine Mannigfaltigkeit ist parakompakt, iff sie eine abzählbare Basis besitzt.

Beweis: siehe [ 18 ], S.271 □.

---

+) Es ist also eine Mannigfaltigkeit ein topologischer Raum, der lokal diffeomorph zum $E^n$ ist. Eine Untermenge $W \subset M$ heißt offen, iff es zu jedem $w \in W$ eine zulässige Karte $(U, \phi)$ gibt, so daß $w \in U$ und $U \subset W$. Gewöhnlich kann M auch als topologischer Raum eingeführt werden mit dem Definitionsbereich einer Karte als offene Untermenge.

## 0.2 Abbildungen

0.2.1 Eine Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung $f:M \to R$. Es heißt f von der Klasse $C^k$ $(k < r)$, falls $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ $C^r$-Funktion lokaler Koordinaten bei $p \in M$ ist für alle p.

0.2.2 Sei M gegeben, und sei $p \in M$ ein Punkt. Eine Kurve durch p ist eine $C^1$-Abbildung $c:J \subset R \to M$ mit J offen aus R und $p \in c(J)$.

0.2.3 Sind $c_1$ und $c_2$ Kurven durch p und ist $(U, \phi)$ zulässige Karte mit $p \in U$, dann heißen $c_1$ und $c_2$ tangential in p bezüglich $\phi$, iff $\phi \circ c_1$ und $\phi \circ c_2$ tangential sind bei 0, d.h., wenn gilt

$$\lim_{p \to p_0} \frac{\|f(p) - g(p)\|}{\|p - p_0\|} = 0 ,$$

mit $f := \phi \circ c_1$, $g := \phi \circ c_2$ und $\|.\|$ als passender Norm, für $p_0 \in U$.

0.2.4 Es ist "tangential" eine Äquivalenzrelation zwischen Kurven durch p. Wir definieren den Tangentialraum von M in p als Menge der Äquivalenzklassen von Kurven durch p:

$$T_pM = \{ [c]_p \mid c \text{ ist Kurve durch } p \} .$$

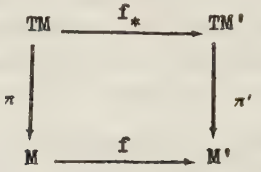
Für $N \subset M$ ist $TM|N = \bigcup_{p \in N} T_pM$. Dann ist $TM = TM|M$ das Tangentenbündel von M. Die Abbildung $\pi : TM \to M$, definiert durch $\pi([c]_p) = p$ heißt Bündelprojektion von M. Elemente des $T_pM$ heißen Tangentialvektoren in $p \in M$.

0.2.5 Sind M und M' zwei Mannigfaltigkeiten, so heißt die $C^\infty$-Abbildung

$$f_* : TM \to TM' ,$$

definiert durch $f_*[c]_p = [f \circ c]_{f(p)}$,

das Tangential von $f:M \to M'$ ($C^\infty$),und es kommutiert das folgende Diagramm:




0.2.6 Für eine Karte $(U,\phi)$ auf M können wir im Sinne von 0.2.5 die Abbildung $\phi_* : UU \to TU'$ konstruieren, die bijektiv ist,da $\phi \in$Diff. So kann $(TU,\phi_*)$ als lokale Vektorbündelkarte aufgefaßt werden (auf TM)[+]. Man kann nun zeigen,daß,falls $\underline{A}$ ein Atlas zulässiger Karten auf M ist, $\underline{A} := \{(TU,\phi_*) \mid (U,\phi) \in \underline{A}\}$ ein Vektorbündelatlas auf TM ist,den man den natürlichen Atlas nennt. Deshalb hat TM eine natürliche Vektorbündelstruktur,die durch die differenzierbare Struktur auf M induziert wird. Mithin ist jede Faser von TM ein Vektorraum. Ist insbesondere M wie in 0.1.5 verabredet,so ist TM 2n-dimensional,Hausdorff und hat abzählbare Basis.

0.2.7 Ein Schnitt $s:M \to TM$ ist eine Abbildung derart, daß $s \circ \pi = id$. Ist s ein $C^\infty$-Schnitt,so heißt dieser $C^\infty$-Vektorfeld X auf M.

0.2.8 Ist $f:M \to M'$ $C^1$-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten,so heißt $y \in M'$ regulärer Wert von f,iff für alle $m \in f^{-1}(y)$ die Abbildung $f_{*m}$ surjektiv ist. Die Menge aller regulären Werte von f bezeichnen wir mit $R_f$.

0.2.9 Satz: (Sard,in schwacher Form von Brown) Es ist $R_f$ dicht in M' für $C^\infty f$[++]).

---

[+]) Der Bündeltheoretische Aspekt wird insbesondere in [12,20] betont. Gewöhnlich kann man auch Vektoren als Derivationen einführen (siehe z.B. in [1] ),dann ergibt sich der Vektorraumcharakter für die Fasern noch unmittelbarer.

0.2.10 Ist $f:M \to N$ Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, differenzierbar bei $p \in M$ und von maximalem Rang, dann heißt f Immersion bei p, falls $\dim M < \dim N$ und Submersion bei p, falls $\dim M > \dim N$. Ist f Immersion und Homeomorphismus (auf das Bild mit induzierter Topologie), so heißt f Einbettung.

Sei M gegeben, von der Dimension n. Dann heißt $N \subset M$ Untermannigfaltigkeit von M mit Dimension m, künftig geschrieben $N \overset{C^r}{\subset} M$, falls es zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte $(U, \phi)$ auf M gibt, so daß $\phi^{-1}(V) = N \cap D(\phi)$, wobei V die Menge $\{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n \mid x_{m+1}=\ldots=x_n = 0\}$ ist und die $x_i$ Koordinaten auf $R^n$ sind.

0.2.11 Ist $N \overset{C^r}{\subset} M$ und M $C^r$, dann ist N selbst $C^r$. Ebenso bekommt N die von M induzierte Topologie (Unterraumtopologie).

0.2.12 Das Bild einer injektiven Immersion, aufgefaßt als Mannigfaltigkeit[+++], heißt immersierte Untermannigfaltigkeit.

0.2.13 Ist $N \overset{C^r}{\subset} M$ und hat M die Dimension n, so sagen wir, N habe Kodimension (codim) k, iff N Dimension n-k hat.

0.2.14 Sei M Mannigfaltigkeit der Dimension n. Ist H Mannigfaltigkeit der Kodimension eins und gibt es eine Einbettung $\varepsilon : H \to M$, so heißt H Hyperfläche von M.

---

[++]) Sei $p \in M$, dann heißt p kritischer Punkt von f, falls Korang $f_{*p} > 0$. Sei $C_f$ die Menge der kritischen Punkte von f. Dann heißt $q \in M'$ kritischer Wert von f, falls $q \in f(C_f)$. Die starke Form des Satzes von Sard heißt: Die Menge der kritischen Werte von f ist vom Maß Null in M' (vgl. z.B. [4], S.34).

[+++]) Ist M $C^r$ und N Menge, ist $f:M \to N$ bijektiv, so kann N auf natürliche Weise zur differenzierbaren Mannigfaltigkeit gemacht werden: Sei die Topologie auf N diejenige, die f zum Homeomorphismus macht. Dann seien Karten auf N definiert als pull-backs über $f^{-1}$ von Karten auf M.

## 0.3 Vektoren und Tensoren

Sei E ein Vektorraum und E* sein Dual. Wir definieren $T^r_s(E) := L^{r+s}(\underbrace{E^* \dots E^*}_{r\text{-mal}}, \underbrace{E \dots E}_{s\text{-mal}}, R)$, den Raum der (r+s)-multilinearen Abbildungen von $E^* \times \dots \times E^* \times E \times \dots E$ in R. Elemente des $T^r_s(E)$ heißen Tensoren.

0.3.1 Sind $t_1, t_2$ Tensoren, so ist $t_1 \circ t_2 \in T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(E)$ ihr Tensorprodukt, definiert durch

$$t_1 \circ t_2 (.,.,.,.) = t_1(.,.)\, t_2(.,.),$$

wobei die Eingänge Basisvektoren der entsprechenden Vektorräume bedeuten. In der Tat ist $T^r_s(E)$ Vektorraum der Dimension $n^{r+s}$. Es ist $\circ$ assoziativ und bilinear.

0.3.2 Unter Kontraktion versteht man eine Abbildung

$$tr: T^1_1(E) \to R,$$

so daß tr die Spur der linearen Abbildung ist, die man zu $t \in T^1_1(E)$ assoziieren kann, aufgrund des Isomorphismus $T^1_1(E) \simeq L(E)$ [12].

0.3.3 Sei M Mannigfaltigkeit und $\pi: TM \to M$ Bündelprojektion. Es heißt $T^r_s(M)$ das Vektorbündel+) von Tensoren der Valenz (r,s) oder $\binom{r}{s}$ (kontravariant der Ordnung r und kovariant der Ordnung s). Insbesondere heißt $T^0_1(M)$ Kotangentenbündel von M, oft auch mit $T^*M$ bezeichnet.

---

+) Über Vektorbündel vergleiche 0.2.6. Man beachte zudem die mögliche Identifizierung $T^1_0(M) = TM$. Mit diesem Konzept können Aussagen über Vektorräume faserweise auf Vektorbündel übertragen werden (und damit auf Mannigfaltigkeiten), eine Technik, die auch in 0.4 angewendet wird (vgl.a. [12]).

0.3.4 Ein Tensorfeld vom Typ $\binom{r}{s}$ auf M ist ein $C^\infty$-Schnitt in $T^r_s(M)$. Sei $\mathfrak{T}^r_s(M)$ die Menge solcher Schnitte. Sei ferner $\mathfrak{F}(M)$ die Menge der $C^\infty$-Abbildungen von M nach R (Funktionen auf M). Ein Vektorfeld von M ist ein Element aus $\mathfrak{X}(M) := \mathfrak{T}^1_0(M)$ (vgl.a. 0.2.7). Eine differentielle 1-Form ist ein Element aus $\mathfrak{X}^*(M) := \mathfrak{T}^0_1(M)$.

Notiz: Mit der Skalarmultiplikation $(f,X) \to fX$, $X \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathfrak{F}(M)$, wird $\mathfrak{X}(M)$ zum $\mathfrak{F}(M)$-Modul [12]. Die direkte Summe $\mathfrak{T}(M)$ der $\mathfrak{T}^r_s(M)$ mit $\mathfrak{T}^0_0 = \mathfrak{F}(M)$ dagegen ist ein reeller Vektorraum mit $\otimes$-Produkt ($f \otimes t = ft, t \in \mathfrak{T}(M)$) und bildet eine bigraduierte $\mathfrak{F}(M)$-Algebra, die Tensoralgebra von M. Ist insbesondere $\varphi \in \mathrm{Diff}(M,N)$, so ist $\varphi^*: \mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{T}(N)$ ein Algebrenhomomorphismus.

0.3.5 In der Folge werden Vektorfelder durch VF, Vektorräume durch VR, Vektorbündel durch VB abgekürzt. Für Tensorfelder und -räume gilt Analoges.

0.3.6 Sei M Mannigfaltigkeit und X VF. Eine Integralkurve von X in $p \in M$ ist eine Kurve c durch p so, daß $X(c(s)) = \dot{c}(s)$ für jedes $s \in J \subset R$. Man kann zeigen, daß c Integralkurve von X ist, iff $X \circ c = \dot{c}$ (s. [1]). Man nennt dieses ein dynamisches System auf M (und sagt, es werde durch eine Differentialgleichung erster Ordnung mit Randbedingung, nämlich $c0 = p$, beschrieben). Zudem gilt $\pi \circ \dot{c} = c$, wobei $\dot{c}$ manchmal aich kanonischer Lift von c in TM heißt. Diese Begriffsbildung werden wir in 1.4 benötigen.

0.3.7 Sei M Mannigfaltigkeit und X VF auf M. Eine Flußbox (oder ein lokaler Fluß) von X in $p \in M$ ist ein Tripel $(U, a, F)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $U \subset M$ (offen), $p \in U$, $a \in R$, $a > 0$ oder $+\infty$,

(2) $F: U \times J_a \to M$ ist $C^\infty$, $J_a := (-a,a)$,

(3) $F|\{u\} \times J_a : J_a \to M$ ist Integralkurve von X bei $u \in M$ für alle $u \in U$,

(4) $F_s = F|U \times \{s\}: U \to F_s(U) \subset M$ (offen), $s \in J_a$, ist Diffeomorphismus.

Die Existenz-und Eindeutigkeitsbeweise für die Flußbox findet man in dieser Notation in [12], S.40.

0.3.8 Sei M Mannigfaltigkeit und X VF, sei zudem $\mathcal{D} \subset M \times R$ die Menge aller Paare $(p,s) \in M \times R$, so daß es eine Integralkurve $c: J \to M$ von X bei p mit $s \in J$ gibt. Dann ist X vollständig, iff $\mathcal{D} = M \times R$. Das heißt, X ist cvllständig, iff jede Integralkurve so ausgedehnt werden kann, daß ihr Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$ wird (vgl. hierzu auch 3.2).

Satz: Seien M und X wie oben. Dann gelten die folgenden Bedingungen

(1) $\mathcal{D} \supset M \times \{0\}$,

(2) $\mathcal{D}$ ist offen in $M \times R$,

(3) es gibt eine eindeutige Abbildung $F_X: \mathcal{D} \to M$, so daß $t \to F_X(p,t)$ Integralkurve bei p ist, für alle $p \in M$.

Beweis: [12], S.41 □ .

Die Abbildung $F_X$ wie oben in (3) heißt Integral von X, die Kurve $t \to F_X$ heißt maximale Integralkurve von X bei p. Ist X vollständig, so heißt $F_X$ Fluß von X.

0.3.9 Ist X vollständiges VF mit Fluß F, so ist die Menge $\{F_t \mid t \in R\} \in \mathrm{Diff}(M)$ eine Gruppe, die man manchmal auch einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen nennt.

0.3.10 Sei $f \in \quad (M)$, so daß

$$f_*: TM \to TR = R \times R \quad \text{mit}$$

$$f_{*p} = f_* \mid T_pM \in L(T_pM, \{f(p)\} \times R) \quad .$$

Dann sei definiert die Abbildung $df: M \to TM$ durch $df(p) = \pi_2 \circ f_{*p}$, wobei $\pi_2$ Projektion auf den zweiten Faktor bedeutet. Es heißt df Differential von f.

0.3.11 Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, dann heißt

$$\mathfrak{L}_X f: M \to R \quad \text{mit}$$

$$\mathfrak{L}_X f(p) = df(p) \mid X(p)$$

Lie-Ableitung von f bezüglich X.

0.3.12 Satz: (1) $\mathfrak{L}_X$ ist Derivation auf der Algebra $\mathfrak{F}(M)$, d.h. $\mathfrak{L}_X$ ist R-linear und für $f,g \in \mathfrak{F}(M)$ gilt

$$\mathfrak{L}_X(fg) = (\mathfrak{L}_X f)g + f(\mathfrak{L}_X g) ,$$

(2) ist k konstante Funktion, so gilt $\mathfrak{L}_X k = 0$.

Bemerkung: Die Familie der Derivationen $\mathfrak{L}_X$ auf $\mathfrak{F}(M)$ ist ein reeller VR und $\mathfrak{F}(M)$-Modul mit $(f\mathfrak{L}_X)(g) = f(\mathfrak{L}_X g)$ und ist isomorph zu $\mathfrak{X}(M)$ als reeller VR und $\mathfrak{F}(M)$-Modul. Insbesondere gilt $\mathfrak{L}_X = 0$, iff $X = 0$ und $\mathfrak{L}_{fX} = f\mathfrak{L}_X$ .

0.3.13 Satz: Seien X,Y VF auf M, dann ist

$$\left[\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y\right] = \mathfrak{L}_X \circ \mathfrak{L}_Y - \mathfrak{L}_Y \circ \mathfrak{L}_X$$

Derivation auf $\mathfrak{F}(M)$.

0.3.14 Es ist $[X,Y] = \mathfrak{L}_X Y$ für VF X,Y selbst VF, so daß $\mathfrak{L}_{[X,Y]} = [\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y]$ . Es heißt $[,]$ Lie-Klammer von Y bezüglich X.+)

0.3.15 Satz: $[,]$ auf $\mathfrak{X}(M)$ zusammen mit der reellen VR-Struktur von $\mathfrak{X}(M)$ bildet eine Lie-Algebra:

(1) $[,]$ ist R-linear,

(2) $[X,X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$,

(3) (Jacobi) $[X,[X,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0$ für alle $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Notiz: $[,]$ hat in Koordinaten Komponenten der Form

$$X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} .$$

---

+) Mit 0.3.17 wird klarer, warum die Lie-Ableitung ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Tensorfelder ausgedehnt werden kann (vgl.a. Fußnote S.28).

0.3.16 Ein Differentialoperator auf der Tensoralgebra $\mathfrak{T}(M)$ von M ist eine Familie von Abbildungen

$$D_s^r(U): \mathfrak{T}^r_s(U) \to \mathfrak{T}^r_s(U)$$

für jedes $r \geq 0$ und $s \geq 0$ und jedes $U \subset M$(offen), so daß folgende Eigenschaften gelten:

(1) D ist Tensorderivation, d.h. R-linear und für irgendzwei Tensoren $t_1, t_2$ gilt

$$D(t_1 \otimes t_2) = Dt_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes Dt_2 ,$$

(2) D ist natürlich bezüglich Einschränkungen,

(3) D kommutiert mit Kontraktionen.

Bemerkung: Durch D wird $\mathfrak{L}_X$ auf ganz $\mathfrak{T}(M)$ ausgedehnt. Man verfährt hier entsprechend der Aussage des Theorems von Willmore ([12], S.50): Sei angenommen, für jedes $U \subset M$ (offen) gibt es Abbildungen der Form $E_U: \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ und $F_U: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, die Tensorderivationen sind und natürlich bezüglich Einschränkungen. Dann gibt es einen eindeutigen Differentialoperator D auf $\mathfrak{T}(M)$, der mit $E_U$ auf $\mathfrak{F}(M)$ und mit $F_U$ auf $\mathfrak{X}(M)$ übereinstimmt. Seien dann $E_U$ und $F_U$ gerade $\mathfrak{L}_{X|U}$ (dann gilt dieses Theorem), so ist $\mathfrak{L}_X$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ eindeutiger Differentialoperator auf $\mathfrak{T}(M)$. Hierzu gehört noch die folgende

0.3.17 Ergänzung: Die Menge aller Derivationen auf $\mathfrak{F}(M)$ bildet einen reellen VR isomorph zu $\mathfrak{X}(M)$. Insbesondere gibt es zu jeder Derivation $\theta$ ein eindeutiges VF X, so daß $\theta = \mathfrak{L}_X$.

0.3.18 Satz: (Lie Transport) Ist $t \in \mathfrak{T}(M)$, so gilt $\mathfrak{L}_X t = 0$, iff t konstant ist entlang der Integralkurven von X, d.h., wenn $t(p) = (F_s^{-1})^r_s \circ t \circ F_s(p), s \in J_a$ für irgendeine Flußbox bei $p \in M$.

Notiz: (vgl. 0.5.6) Sei M Mannigfaltigkeit mit Konnektion, dann gilt $\mathfrak{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Verschwindet insbesondere $\mathfrak{L}_X g, g \in \mathrm{Riem}(M)$, so heißt X Killing-VF.

## 0.4 Differentialformen

Sei E endlich-dimensionaler reeller VR, und seien $\Omega^0(E) = R$ und $\Omega^1(E) = E^*$ und gelte allgemein $\Omega^k(E) = L_a^k(E,R)$. Sei $\Omega^k(E)$ also der VR der antisymmetrischen k-multilinearen Abbildungen oder äußeren k-Formen auf $E$[+]).

Sei $S_k$ die Permutationsgruppe auf k Elemente einer gegebenen Menge, d.h., sei $S_k$ die Menge aller Bijektionen $f: |1,\ldots,k| \to |1,\ldots,k|$, so daß sie Gruppe ist unter Komposition. Dann ist $S_k$ von der Ordnung eins. Ist zudem $R \setminus |0|$ mit Multiplikation vorgegeben, so existiert ein Homomorphismus

$$\text{sign}: S_k \to (R \setminus |0|, \cdot),$$

so daß sign (ab) = sign a sign b, für $a,b \in S_k$, und das Bild von sign gerade $|-1,1|$ ist.

0.4.1 Die Alternierungsabbildung $A: T_k^0(E) \to T_k^0(E)$ ist definiert durch

$$At(e_1,\ldots,e_k) = \frac{1}{k!} \sum_a \text{sign } a \; t(e_{a(1)},\ldots,e_{a(k)})$$

mit der Summe über alle k! Elemente von $S_k$ genommen.

0.4.2 Seien $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_\ell^0(E)$, dann heißt die Operation $\wedge$, definiert durch

$$\Omega^{k+\ell} \ni \alpha \wedge \beta := A(\alpha \otimes \beta)$$

Äußeres Produkt (wedge product) von $\alpha$ mit $\beta$. Es hat $\wedge$ die folgenden Eigenschaften:

(1) $\alpha \wedge \beta = A\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge A\beta$,
(2) $\wedge$ ist bilinear,
(3) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$,
(4) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

---

[+]) Die Aussagen bis 0.4.7 können wieder von VR faserweise übertragen werden (vgl. S.30).

0.4.3 Die direkte Summe der $\Omega^k(E)$ mit $k = 0,1,\ldots,$ der reellen VR-Struktur und Multiplikation durch $\wedge$ induziert, heißt Äußere Algebra von E.

0.4.4 Hat E die Dimension n, so gilt $\Omega^k(E) = |0|$ für $k > n$ und $\dim \Omega^k(E) = \binom{n}{k}$ für $0 < k < n$.

Die nichtverschwindenden Elemente des eindimensionalen Raumes $\Omega^n(E)$ heißen Volumenelemente. Sind $\omega_1$ und $\omega_2$ irgendzwei Volumenelemente, so heißen sie äquivalent, iff es ein $h > 0$ gibt, so daß $\omega_1 = h\,\omega_2$. Eine Äquivalenzklasse von Volumenelementen auf E heißt Orientierung auf E.

0.4.5 Sei $\dim E = n$ und sei $\phi \in L(E)$. Es gibt eine eindeutige Konstante $\det \phi$ (Determinante von $\phi$), so daß für

$$\phi_V : \Omega^n(E) \to \Omega^n(E)$$

mit $\phi_V\, \omega(e_1,\ldots,e_n) = \omega(\phi(e_1) \ldots \phi(e_n))$ gilt: $\phi_V \omega = \det \phi \cdot \omega$ für alle $\omega \in \Omega^n(E)$.

0.4.6 Lemma: $\det: L(E) \to R$ ist $C^0$.

Notiz zum Beweis: Man benutze die Supremumsnorm für die Topologie von $L(E)$, der Form $\| \phi \| = \sup ( \| \phi(e) \| / \| e \| )$ mit $e \neq 0$.

0.4.7 Theorem: Sei M Mannigfaltigkeit. Es gibt eine eindeutige Familie von Abbildungen (die Indizierung wird unterdrückt) $d(U): \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, $U \subset M$ (offen), die Äußere Ableitung auf M, so daß

(1) d Antiderivation ist (d.h. R-linear und für irgendzwei $\alpha, \beta$ gilt

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta),$$

(2) $f \in \mathfrak{F}(M) \Rightarrow df$ ist totales Differential,

(3) $d^2 = 0$,

(4) d ist natürlich bezüglich Einschränkungen.

0.4.8 Theorem: Sei X VF, dann ist d natürlich bezüglich Lie-Ableitungen, d.h., es kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{k}(M) & \xrightarrow{\pounds_X} & \Omega^{k}(M) \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \Omega^{k+1}(M) & \xrightarrow{\pounds_X} & \Omega^{k+1}(M) \end{array}$$

0.4.9 Seien M Mannigfaltigkeit, x VF und $\omega \in \Omega^{k+1}$. Dann heißt die Abbildung

$$i_X : \Omega^{k}(M) \to \Omega^{k-1}(M),$$

so daß $i_X\omega \in \mathfrak{F}^{0}_{k}(M)$ mit

$$i_X\,\omega\,(X_1,\ldots,X_k) = (k+1)\;\omega\;(X,X_1,\ldots,X_k)$$

und $i_X\,\omega = 0$, iff $\omega \in \Omega^{0}$, inneres Produkt von X mit $\omega$.

0.4.10 Theorem: Sei $i_X$ gegeben und seien $\alpha,\beta \in \Omega^{k,\ell}$ und $f \in \mathfrak{F}(M)$. Dann gelten folgende Eigenschaften:

(1) $i_X$ ist Antiderivation,

(2) $i_{fX}\alpha = f\, i_X \alpha$ ,

(3) $i_X\, df = \pounds_X f$ ,

(4) (Cartan) $\pounds_X \alpha = i_X\, d\alpha + d i_X \alpha$ ,

(5) $\pounds_{fX}\alpha = f\, \pounds_X \alpha + df \wedge i_X \alpha$ .

0.4.11 Es heißt $\omega \in \Omega^{k}$ abgeschlossen, iff $d\omega = 0$ und exakt, iff es ein $\Theta \in \Omega^{k-1}$ gibt, so daß $\omega = d\Theta$ .

0.4.12 Theorem: (1) Jede exakte Form ist abgeschlossen (trivial). (2) (Poincaré Lemma) Ist $\omega$ abgeschlossen, dann gibt es für jedes $p \in M$ eine Umgebung U, für die $\omega \restriction U \in \Omega^{k}$ exakt ist.

## 0.5 Metrik und Zusammenhang (Riemannsche Geometrie)

0.5.1 Eine Riemannsche Metrik auf M ist ein Tensor $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, so daß für alle $p \in M$, $g(p)$ symmetrisch und positiv-definit ist. Es ist $\mathfrak{T}_2^0(M)$ der VR der symmetrischen Bilinearformen auf M.

0.5.2 Lemma: Auf jeder Mannigfaltigkeit M in unserem Sinne (0.1.5) gibt es eine Riemannsche Metrik.

0.5.3 Satz: Ist eine Riemannsche Metrik gegeben, so gibt es einen natürlichen Weg, eine Metrik d der Form $d: M \times M \to R$ zu bestimmen, so daß (M,d) zum metrischen Raum wird. Man beachte dabei die (allerdings übliche) Ambiguität der Ausdrücke: Nur d ist Metrik im topologischen Sinne! Letztere tritt auch nur an dieser Stelle explicit auf, kann deshalb nicht mit der äußeren Ableitung verwechselt werden. Auf die Assoziierung der Metriken wollen wir nicht näher eingehen, es sei dazu auf [ 4] verwiesen.

Alle Riemannschen Metriken über M seien künftig mit Riem(M) bezeichnet. In lokalen Koordinaten kann man schreiben

$$ds^2 := g \mid U = g_{ik}\, dx^i \otimes dx^k \quad ,$$

wobei $U \subset M$ und die $g_{ik}$ die metrischen (Tensor-) Komponenten bedeuten.

0.5.4 Satz: Sei $g \in \mathrm{Riem}(M)$ und sei M zusammenhängend. Sei d die korrespondierende (topologische) Metrik auf M. Dann ist die durch d auf M induzierte Topologie die gleiche, wie die Originaltopologie auf M.

0.5.5 Lemma: Jede Mannigfaltigkeit M in unserem Sinne ist metrisierbar.

0.5.6 Sei $g \in \mathrm{Riem}(M)$. Eine Isometrie ist eine Abbildung $f: M \to N$ (N Mannigfaltigkeit) so, daß f g erhält.

Notiz: (vgl. 0.3.18) Killing-VF bestimmen Isometrien.

0.5.7 Sei $\mathfrak{T}(M)$ Tensoralgebra auf M und seien X,Y VF. Dann heißt die Abbildung

$$\nabla_X : \mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{T}(M)$$

(typerhaltend) kovariante Ableitung, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\nabla_X$ kommutiert mit Kontraktionen,

(2) $\nabla_X f = X f$ , für jedes $f \in \mathfrak{F}(M)$,

(3) $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$,

(4) $\nabla_{fX} K = f \nabla_X K$ , für jedes $f \in \mathfrak{F}(M)$ und $K \in \mathfrak{T}(M)$.

0.5.8 Satz: Sind $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ VF, so gilt

(1) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,

(2) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,

(3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ , für jedes $f \in \mathfrak{F}(M)$,

(4) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$, für jedes $f \in \mathfrak{F}(M)$.

0.5.9 Ein Tensorfeld auf M heißt paralleltransportiert, iff $\nabla K = 0$ ( $\nabla_X K = 0$ für alle $X \in T_pM, p \in M$).

0.5.10 Sei X VF auf MM, d.h. ein Schnitt von TM nach TTM, so daß $\pi_* \circ X = id$, wenn $\pi_*$ die kanonische Projektion von TTM auf TM bedeutet.

Ein Spray ist ein VF auf TM mit den Eigenschaften

(1) $\pi_* X(v) = v$ , für jedes $v \in TM$,

(2) $X(sv) = s_* sX(v)$ , für jedes Paar $(s,v) \in R \times TM$.

Die erste Bedingung kennzeichnet das Spray als Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ein Spray existiert global auf M, denn mit einer Partition der Eins [ 4,12 ] kann man das globale Spray aus lokalen zusammensetzen.

Lösungskurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, definiert durch ein Spray, heißen Geodätische des Sprays.[+]

0.5.11 Es gibt eine Abbildung exp, die die Geodätischen auf M abträgt, auf die folgende Weise: Sei M Mannigfaltigkeit und X Spray. Sei ferner $\Delta_X$ definiert durch

$$\Delta_X := \{ v \in TM \mid \xi_v : [0,1] \to TM, \xi_v(0) = v \}$$

(offen) in TM. Dann heißt die Abbildung

$$\exp: \Delta_X \to M \text{ , so daß}$$

$$\exp(v) = \pi \circ \xi_v(1) \text{ , für jedes } v \in TM$$

Exponentialabbildung von TM in M.

0.5.12 Eine affine Konnektion ist eine Abbildung auf $\mathfrak{T}(M)$ derart, daß jedem VF X ein Differentialoperator im Sinne von 0.3.16 zugeordnet wird: $X \to \nabla_X$. Ist Y ein anderes VF, so ist $\nabla_X Y$ die kovariante Ableitung von Y bezüglich X (0.5.7).

0.5.13 Eine affine Konnektion heißt metrisch, falls für jede Kurve in M und jedes VF X, das parallel zur Kurve ist, $\dot{g}(X,X) = 0$[++]) gilt, wobei der Punkt die Ableitung nach dem Kurvenparameter bedeutet und $g \in Riem(M)$ ist. Man kann zeigen [21], daß, gegeben ein $g \in Riem(M)$, eine eindeutige symmetrische, affine, metrische Konnektion existiert auf M[+++]).

---

[+]) Sei $X: TM \to TTM$ gegeben, dann bestimmt X einen Fluß auf TM $\Phi: J \subset R \times TM \to TM$ mit J offen in R. Es heißt $\Phi$ geodätischer Fluß auf TM.

[++]) Diese Darstellung folgt aus dem Skalarproduktcharakter von g, man kann auch schreiben $\nabla g = 0$.

[+++]) Lokal gilt $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \Gamma_{ij}^{\kappa} \frac{\partial}{\partial u^{\kappa}}$, $U \subset M$ mit $u^i$.

0.5.14 Seien X,Y VF. Ein Tensor $T \in \mathfrak{T}^1_2(M)$, definiert durch

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

heißt Torsionstensor auf M mit Konnektion $\nabla$. Ein Tensor $R \in \mathfrak{T}^1_3(M)$, definiert durch

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

mit Z VF, heißt Riemannscher Krümmungstensor auf M.

0.5.15 Ist $T = 0$, so heißt M torsionsfrei auf M, insbesondere folgt dann $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (vgl. 0.3.18). Ist dies der Fall, so heißt $\nabla$ symmetrisch (vgl. in 0.5.13).

## (1) Versicherungsprozesse auf Mannigfaltigkeiten

Im ersten Kapitel soll das grundlegende Konzept einer dynamischen Versicherungstheorie entwickelt werden, ausgehend von den bereitgestellten Begriffen aus (0). Nach einigen Definitionen,die eine Beschreibung der Versicherungsmannigfaltigkeit ermöglichen,werden Eigenschaften typischer Strukturen diskutiert. Es folgt eine Einführung der Dynamik und Versicherungsprozesse werden definiert und auf Versicherungsgesamtheiten als Untermannigfaltigkeiten der Versicherungsmannigfaltigkeit betrachtet.

### 1.1 Die Versicherungsmannigfaltigkeit I und ihre Eigenschaften

Im Rahmen der wirtschaftlichen Planung einer Gesellschaft ist es notwendig,auf der Grundlage eines Studiums der Wirtschaftsprozesse Aussagen treffen zu können über die Evolution eines betrachteten Systems. Das heißt,es besteht die Absicht,eine Prognostik zu entwickeln,die es ermöglicht,Kriterien für den Ablauf von Wirtschaftsprozessen herzuleiten,mit deren Kenntnis Ruin verhindert und Profit optimiert werden soll. Hierbei steht das Verhalten des Kunden oder Konsumenten im Vordergrund. In der Tat wird ein Wirtschaftsprozeß gerade aus dem Wechselspiel aus Aktion und Reaktion zwischen Gesellschaft und Kunden bestehen. Will man dieses Wechselspiel gezielt steuern können,ist es notwendig,eine Strategie zu entwickeln,deren Form aber ein Ergebnis des Studiums früherer Prozesse, also der Erfahrung ist.

Im Bereich der Versicherungswirtschaft betrachtet man die Gesamtheit der Versicherungsnehmer bei einer bestimmten Gesellschaft. Letztere ist an der Evolution dieses Bestandes interessiert. Sie wird also spezielle Wirtschaftsprozesse,die Versicherungsprozesse studieren.

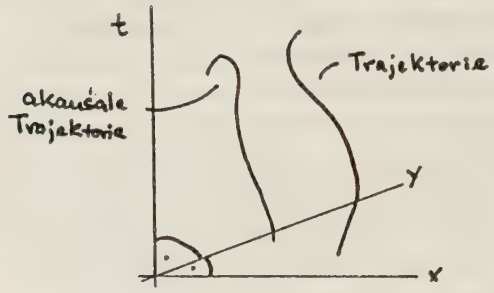
Es wird nun angenommen,daß sich Personen in einem geeigneten Wirtschaftsraum,dem Versicherungsraum, entwickeln. Dieser (dynamische) Raum wird als differenzierbare Mannigfaltigkeit eingeführt. Dabei soll das Adjektiv "dynamisch" bereits auf Wechselwirkungen hindeuten,die zwischen Personen und Personen und Gesellschaften stattfinden werden. Dieser Aspekt wird später zu diskutieren sein (2).

Personen sollen sich zeitlich über eine Kurve auf der Versicherungsmannigfaltigkeit entwickeln, in Analogie zu Teilchen mit Energie auf der Raum-Zeit [ 23 ] . Diese Kurve nennen wir Trajektorie der Person. Eine gesamte Trajektorie definiert die Versicherungsgeschichte einer Person. Der gewählte Ansatz verläuft in ähnlichen Bahnen wie die Einführung eines Konsumentenraumes nach Smale und anderen (vgl.z.B. [ 8,106,107 ] ): Die Waren sind hier die Versicherungen,die abgeschlossen werden können (Angebot),und für die der Kunde eine Präferenz gemäß den Überlegungen einer wettbewerblich orientierten Strategie (vgl.3.3) entwickeln soll.

1.1.1 (Versicherungszustand) Befindet sich eine Person an einem bestimmten Punkt auf der Versicherungsmannigfaltigkeit (vgl. 1.1.4),so sagen wir,sie nehme einen bestimmten Zustand ein. Ein Punkt auf der Mannigfaltigkeit ist durch Koordinaten im $R^n$ repräsentiert als ein n-tupel reeller Zahlen,die jede eine bestimmte Versicherungsart (durch die jeweilige Koordinatenachse) und eine bestimmte Versicherungshöhe (-summe)(durch die Abstände auf der Achse) charakterisieren.

Wählen wir lokale kartesische Koordinaten (im flachen Raum) und als einfaches Beispiel zwei Versicherungen, sagen wir x und y (etwa Leben und Kfz),mit entsprechenden Versicherungssummen (die sich deshalb

am ehesten anbieten,weil sie gleichzeitig zusätzliche Qualitäten,etwa juristische Konditionen,implizieren), so läßt sich eine Trajektorie durch die folgende Skizze veranschaulichen.




Sk. 1 Versicherungsraum

1.1.2 Zu verschiedenen Zeitpunkten wird eine Person in der Regel verschiedene Versicherungszustände einnehmen. Dieser an sich diskrete Prozeß kann leicht als kontinuierlich aufgefaßt werden,in Analogie zur üblichen Praxis in der Versicherungsmathematik (vgl. z.B. [ 28 ] ).

1.1.3 Den Versicherungsraum zur Mannigfaltigkeit zu machen entspringt dem Bedürfnis,verallgemeinerte Strukturen untersuchen zu können,jedoch im Rahmen der bislang bekannten klassischen Theorie. Zudem sollen später Wechselwirkungen diskutiert werden, die durch ihre Kopplung an die Geometrie zu einer einfachen (intrinsischen) Interpretation führen. Wir formulieren deshalb das

Axiom 1: Der Raum,in dem sich Versicherungsnehmer entwickeln (bezogen auf eine Versicherungsgesellschaft) ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1.1.4 Nach den Vorbereitungen aus (0) lassen sich nun wesentliche Charakteristika von Mannigfaltigkeiten

übernehmen,die ohne Schwierigkeit eine Übertragung der klassischen Analysis auf den zuvor intuitiv eingeführten Versicherungsraum ermöglichen. Die Versicherungsmannigfaltigkeit sei künftig mit I bezeichnet.

1.1.5 Es sei ferner als künftige Konvention verabredet,I als glatt ($C^\infty$) aufzufassen und als $T_2$ (Hausdorff),letzteres schon wegen der notwendigen Metrisierbarkeit. Insbesondere gelten diese Konventionen auch für Gebiete,in denen die Theorie der Mannigfaltigkeiten bereits Anwendung gefunden hat (vgl. [ 23 ] ).

Ebenso kann die Einführung einer Riemannschen Metrik auf I motiviert werden (sie existiert stets,vgl. (0)), zusätzlich wird gefordert,daß insbesondere eine Lorentz-Metrik g auf I existiert,d.h.,g soll auch nichtentartet sein und sign g = - (n-1),wenn immer I von der Dimension n ist. Hierbei wird auch die Kontinuität des Raumes gewahrt,was einem grundsätzlichen Schema der Mathematik entspricht (dieses gilt bereits für eine Riemannsche Metrik,allerdings impliziert eine Lorentz-Metrik (zusammen mit der $T_2$-Eigenschaft) Orientierbarkeit von I). Andererseits führt eine Metrik dieses Typs zu einer einfachen Diskussion des (trivialen) flachen Raumes,der von jeher anschaulich ist. Wir fordern also das

Axiom 2: Es gibt eine Lorentz-Metrik auf I.

1.1.6 Zudem sollte die Mannigfaltigkeit einzige Zusammenhangskomponente von sich selbst sein,in diesem Sinne: Da man annehmen kann,daß eine Gesellschaft ihre Kunden stets übersehen kann,gibt es keine Komponente,von denen man keine Kenntnis hätte. Andererseits soll die Konkurrenz im "Komplement" der entsprechenden Komponente zusammengefaßt sein: In der Regel wird I nämlich nur Zusammenhangskomponente einer Mannigfaltigkeit aller Versicherungsnehmer sein. Diese Tatsache interessiert eine Gesellschaft

lediglich im Rahmen eventueller Wettbewerbsstrategien (vgl. hierzu 3.3). Ganz allgemein reicht es jedoch hin, alle etwaigen anderen Zusammenhangskomponenten als "Komplement" von I aufzufassen. Bei Wechselwirkungen im Konkurrenzbereich (zwischen Personen auf I und anderen Gesellschaften) kann man einfach von "externen" Wechselwirkungen sprechen.

1.1.7 Mit der Existenz einer Lorentz-Metrik und der geforderten $T_2$-Eigenschaft ist I mithin parakompakt [ 19 ]. Nach 0.1.7 besitzt I dann eine abzählbare Basis.

1.1.8 Schließlich ist I noch zeitorientierbar. Dies folgt schon aus der metrischen Intention: Es heißt I zeitorientiert, falls es ein zeitartiges Vektorfeld gibt auf I, etwa X, das nirgends verschwindet, und man die folgende Wahl getroffen hat: Ist $x \in I$, so heißt die Komponente zeitartiger Vektoren, die $X_x$ enthält, Menge der zukunftsgerichteten Vektoren bei x. Die andere Komponente heißt konsequent vergangenheitsgerichtet.

Eine alternative Einführung geht wie folgt: Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf der Menge J der zeitartigen Vektorfelder auf I, so daß $u \sim v \pmod{\sim}$ bedeutet, $u.v > 0$ mit $u,v \in J$. Dann enthält $J/\sim$ zwei Elemente, von denen eine als positive Zeitrichtung ausgezeichnet wird.[+)]

1.1.9 Bevor wir Dynamik auf I betrachten, gibt es zunächst rein kinematische Aspekte, denn eine Person entwickelt sich über I ähnlich einem Teilchen auf der Raum-Zeit[++)].

---

[+)] Nach Geroch [ 22 ] impliziert Zeitorientierbarkeit auch Raumorientierbarkeit (also insbesondere Orientierbarkeit im Sinne von 0.4.4), iff I eine Spinstruktur zuläßt. Es gibt dann auch ein globales Tetrad auf I (vgl.a. Anhang A.1 und [ 22 ] ).

[++)] Also ähnlich einer wandernden Punktsingularität.

Der Punkt, an dem sich die Person befindet, zu einer bestimmten Zeit, ist durch n-1 Versicherungskoordinaten und die Zeit $t = t_0$ dargestellt (vgl. S.44). Freie Personen (frei von Wechselwirkungen) nehmen in der Folge (für beliebiges t) extremale Kurven ein, nämlich Geodätische. Diese "naive" Auffassung einer Person in freier Entwicklung als freies Teilchen wird formuliert im

Axiom 3: Freie Personen bewegen sich auf Geodätischen über I.

1.1.10 Hier tritt noch ein weiterer Aspekt hinzu: Die Verhaltensweisen von Personen (und damit der Versicherungsprozeß) sind stochastischer Natur. Es wird deshalb nicht möglich sein, determinierte Voraussagen über Trajektorien von Personen zu machen, wie dies etwa in der klassischen (makroskopischen) Physik der Fall ist. Vielmehr liegt jede Trajektorie auf I nur bis auf eine Wahrscheinlichkeit fest[+]. Es wird deshalb notwendig sein, eine Wahrscheinlichkeitsstruktur auf I einzuführen, die später zu diskutieren sein wird (1.3).

Eine freie Person im obigen Sinne unterliegt also allein ihrer eigenen Meinung, wir sagen, ihrer Eigenaktion. Da mit Geodätischen stets eine Extremalauffassung von Kurven auf I verbunden ist (d.h., der Weg über eine Geodätische ist der "kürzeste" in einem zu spezifizierenden Sinne), heißt eine Trajektorie ideal im Sinne der Gesellschaft, falls sie geodätisch ist (und regulär). Praktisch bedeutete dies, daß eine Person in möglichst kurzer Zeit alle bei einer Gesellschaft angebotenen Versicherungen abschließt.

---

[+]) Interessant ist ein verallgemeinerter Lie-Transport: Zwei Vektorfelder auf I, X und Y, kommutieren bis auf eine Varianz, d.h. $[X,Y] = 0$, aber $\mathrm{Var}[X,Y] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X,Y] - [X,Y])^2 \neq 0$.

1.1.11 Es liegt also ein stochastischer Prozeß vor, die explicite Einführung folgt später, so daß die folgende Verallgemeinerung sinnvoll erscheint: Es heißt eine Trajektorie geodätisch im allgemeinen Sinne, falls sie geodätisch ist bis auf eine Wahrscheinlichkeit P.

Beim Eintritt einer Person liegt (durch die Konditionen) eine Metrik fest, durch die metrischen Komponenten $g^{o}_{ik}$ charakterisiert, mit bestimmten Linienelement. Ändert sich diese Metrik niemals für alle $t > t_o$, wobei $t_o$ den Zeitpunkt des Eintritts bedeutet, so ist die Entwicklung der Person determiniert. Ihre Geodätische bei freier Bewegung liegt fest mit P = 1.

1.1.12 Bemerkung: Die hier eingehende Statistik ist gewöhnlich nicht sinnvoll für eine Person allein. Gewöhnlich werden sich viele Personen auf I befinden (eine Population). Eine Verteilung für die metrischen Komponenten $g_{ik}$ bei bekannten Anfangswerten wird dann entsprechend der Erfahrung so angegeben, daß das Stichprobenverhalten größerer Populationen berücksichtigt ist [9].

1.1.13 Den (isolierten) Transport nicht-wechselwirkender (freier) Personen über I bezeichnen wir als rein stochastischen Prozeß, um den Zufallscharakter des persönlichen Geschmacks (das persönliche Entscheidungsverhalten) zu reflektieren.

Bemerkung: Intuitiv ist bereits einzusehen, daß Personen durch Meinungsänderungen auch Änderungen der Geometrie von I hervorrufen. Ebenso wird die Geometrie durch externe Einflüsse anderer Gesellschaften verändert. Dies bietet erneut einen Einstieg zur Theorie der Wechselwirkungen (2), die einen Feldcharakter (geometrischer Natur) verliehen bekommen. Formal werden große Teile des Modells in Analogie zur physikalischen Teilchenmechanik entwickelt [25], dies erscheint aber auch vernünftig im Rahmen stochastischer Prozesse [94].

Zudem unterliegt hierbei die Auffassung,daß auch Wirtschaftsprozesse letzlich physikalischer Natur sind,nur mit sehr speziellen (und komplexen) Eigenschaften. Die Kette von der Physik zur Biologie und weiter zur Psychologie läßt sich nicht durchbrechen, wenn auch manchmal der unterschiedliche Entwicklungsstand der genannten Gebiete darüber hinwegtäuscht.

1.1.14 Es sei noch bemerkt,daß alle wirtschaftstheoretischen Überlegungen,die künftig (und naturgemäß) in das Modell eingehen,auf der Annahme eines Systems westlicher Art,d.h. basierend auf freier Marktwirtschaft,beruhen. Insbesondere kann (im Gegensatz zu anderen Branchen) hier durchaus perfekter Wettbewerb im Sinne von Samuelson [9 6] vorausgesetzt werden. Selbstverständlich sind hierbei keine staatlichen Versicherungen (gesetzliche Kranken- und Rentenversicherung etwa) einbezogen.

1.1.15 Im Rahmen dieses Modells ist ein Versicherungsprozeß gerade definiert durch die Versicherungsgeschichte einer Person,d.h. eine Trajektorie über I. Alle Einzelprozesse werden dann den gesamten Versicherungsprozeß des Bestandes ergeben.

1.1.16 Gewöhnlich kann ein Versicherungsprozeß als kontinuierliche Trajektorie über I aufgefaßt werden. Das heißt,ändert der Kunde seine Versicherungskombination,so wird die Trajektorie glatt von irgendwelchen Untermannigfaltigkeiten auf andere übergehen. Es ist aber auch möglich (obwohl selten),daß eine Person ihre bisherige Kombination abwirft und eine gänzlich neue bei derselben Gesellschaft aufnimmt. Dann liegt keine glatte Kurve vor. Solche Übergänge nenne wir Transitionen,die deutbar sind als Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten (siehe 1.4). Als Beispiel einer speziellen Transition kann der Fall gelten,daß eine Person ihre Berufssituation so verändert,daß sie Versicherungen abschließen kann,die ihr bislang nicht offenstanden. Sie transitiert dann in disjunkte Strata von I.

Unter einem Stratum verstehen wir dabei eine bezüglich I disjunkte Untermannigfaltigkeit auf die folgende Weise:

$$I = \dot{\bigcup_{1}} S_i \oplus S_j ,$$

wobei $\oplus$ die direkte Summe bedeuten soll und die $S_j$ in (laxer Schreibweise) alle anderen (in diesem Sinne nicht "disjunkten", also "eintretbaren") Untermannig. faltigkeiten. Näheres über Strata ist z.B. in [7] zu finden.

1.1.17 Das Studium der Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten und ihrer Singularitäten ist Gegenstand der Katastrophentheorie. Singularitäten liegen auf I dann vor, wenn entweder Trajektorien (insbesondere Geodätische) von Personen auf I in einem näher zu bestimmenden Sinne unvollständig werden oder Transitionen singulär werden im Sinne von Thom. Es liegt nahe, daß der Umfang der Menge aller Singularitäten (der Katastrophenmenge) ein Maß liefern wird für die Ruinwahrscheinlichkeit.

1.1.18 Offenbar bieten Theorie der stochastischen Prozesse und (topologische) Dynamik gemeinsam Ansatzpunkte zu einer qualitativen Behandlung der Risikotheorie. Das vorliegende Modell ist für alle Versicherungsarten (einzelner Gesellschaften) gültig, unter den oben gemachten Annahmen über das gegenwärtige Wirtschaftssystem und der Tatsache, daß sich Versicherungsunternehmen von anderen Wirtschaftsunternehmen nur darin unterscheiden, daß sie sich stets (langfristig) wirtschaftsstabilisierend auswirken [96]. Versicherungskunden unterliegen jedoch ganz ähnlichen Verhaltensweisen wie beliebige andere Konsumenten. Mithin ist die vorliegende Darstellung end verknüpft mit Themenkreisen wie Operations Research und Ökonometrie, könnte also nach Bedarf auf diese beiden Teilgebiete der allgemeinen Wirtschaftstheorie erweitert werden.

1.1.19 Mit den vorgehenden Betrachtungen erkennt man, daß Versicherungsgesamtheiten X,N $\overset{c}{M}$ I Untermannigfaltigkeiten von I darstellen. Ist M n-1-dimensionale Gesamtheit in I,dann ist M stets Hyperfläche. Insbesondere ist jede Gesamtheit der Kodimension k Hyperfläche einer der Kodimension k+1.

1.1.20 Eine Riemannsche Metrik für n Versicherungen kann durch ein Linienelement der folgenden Form dargestellt werden:

$$ds^2 = f(.)\,dt^2 - g(.)\,dx_1^2 - \ldots - h(.)\,dx_n^2$$

in lokalen Koordinaten,wobei die f,g,h irgendwelche Funktionen der Koordinaten sind. Anschaulich sieht man,daß t = const. eine raumartige Hyperfläche liefert. Wirft insbesondere ein Kunde n-2 Versicherungen ab,so verbleibt er mit einer Metrik in I,die durch

$$ds^2 = f(.)'\,dt^2 - g(.)'\,dx_1^2$$

charakterisiert ist. Aus den $g_{ik}$ kann man über die Christoffel-Symbole stets Geodätische dieser bestimmten Geometrie herleiten. Bei Abwesenheit von Transitionen ist der Vorgang des "Zurückfallens" glatt (jedoch kritisch,da sich der Rang des Kurventangentials ändert,vgl. 3.3).

1.1.21 Bemerkung: Zunächst reicht die Auffassung von Gesamtheiten als Untermannigfaltigkeiten von I aus für die Betrachtung. Erst im Falle von Transitionen sieht man,daß jedes M auch eine Foliation darstellt auf I,deren Blätter durch die jeweiligen Versicherungssummen gegeben sind. Andere N,... bilden Foliationen, die zur ersteren transversal liegen [3] .

1.2 Versicherungsprozesse auf I

In diesem Abschnitt sollen Versicherungsprozesse für den Fall ohne Wechselwirkungen mit der Geometrie verknüpft werden.

1.2.1 Die Zufallsvariable in unseren (stochastischen) Versicherungsprozessen ist die jeweilige Metrik (einer Person), von den anfangs abgeschlossenen Konditionen und der weiteren Evolution bestimmt. Die Gesamttrajektorie einer Person ist gerade gegeben durch die Gesamttrajektorie über die Untermannigfaltigkeiten von I plus eventuellen Transitionen.

1.2.2 Im Rahmen der bereits angesprochenen Analogie zwischen Personen auf I und Teilchen auf der Raum-Zeit liegt es nahe, eine Selbstwechselwirkung auf die folgende Weise zu berücksichtigen: Eine Person krümmt die sie umgebende Geometrie des Versicherungsraums auf charakteristische Art, d.h., aus der Metrik mit den $g_{ik}$ läßt sich explicit ein Krümmungstensor angeben, wobei Personen die Rolle von Punktquellen auf I übernehmen. Insbesondere reduziert sich die Geometrie auf die des flachen Raumes, iff es keine Personen auf I gibt (Trivialfall). Wir formulieren deshalb das

Axiom 4: Die Präsenz von Personen auf I bewirkt eine Krümmung der unterliegenden Geometrie.

1.2.3 Man kann diese Aussage im Prinzip der Äquivalenz von Entscheidungen (s.vorn) verallgemeinern. Jeder Eigenaktion einer Person entspricht auch ein gewisser Energieinhalt des Raumes+).

---

+) Wegen dem Punktquellencharakter von Personen kann man sich dabei (in diesem einfachen Modell) auf eine "äußere" Metrik beschränken, Aussagen über interne Entscheidungsmuster unterbleiben zunächst (vgl.a.3.4).

1.2.4 Aus dem letzten Axiom ergibt sich die Auffassung, auf die wir gerade abzielen: Es gibt eine Wechselwirkung zwischen der einzelnen Person auf I und der unterliegenden Geometrie in der Umgebung der Person. Qualitativ formuliert, entspricht also ein gewisser Energieinhalt (lokal auf I) einem gewissen "Krümmungszustand" des Raumes. Um diese Aussage zu formalisieren, benötigen wir noch ein weiteres Axiom:

Axiom 5: Es gelten lokal Einstein's Feldgleichungen auf I, in der Form

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} (R + \Lambda) = 8\pi T^{ik} \quad ,$$

wobei $R^{ik} = R^{jik}{}_{j}$, $R = R^{i}{}_{i}$ und $i,k,j = 0,1,\ldots,n-1$. Auf der rechten Seite steht der Energie-Impuls Tensor, der später noch explicit diskutiert wird und den lokalen Energieinhalt angibt. Es ist $\Lambda$ eine Konstante, die o.B.d.A. gleich Null gesetzt werden kann. Beide Seiten bestimmen einander. Ist insbesondere $T^{ik}$ gleich Null, so verbleibt eine Geometrie, die durch den oben besprochenen Punktquellencharakter bestimmt ist. Setzen wir für $T^{ik}$ das Energiekonglomerat für Wechselwirkungen zwischen Personen (vgl.(2)), so bekommen wir die Geometrie von wechselwirkenden Teilchen[+]).

---

[+]) Die Einführung der Feldgleichungen ist in erster Linie damit motiviert, daß alle Ausdrücke dadurch eine einfache Form annehmen und auch eine naheliegende Interpretation zulassen. Im nächsten Kapitel, wenn eine Metrik von Teilchen berechnet wird, die wechselwirken können (mit anderen Teilchen), und diese dann für den Versicherungsraum interpretiert wird, äußert sich die Annahme der Feldgleichungen bereits recht suggestiv. Es wird eine zentrale künftige Aufgabe sein, realistischere Metriken zu finden.

1.2.5 Bemerkung 1: Man kann in der Darstellung der Geodätischen (vgl.o.) noch weitere Störterme berücksichtigen. Ist die Bewegung der Person über I nicht frei im Sinne von Axiom 3, so kann man dieser Tatsache durch einen Störterm Rechnung tragen, der folgenden Art:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = H(x^i)$$

mit s als affinem Parameter und $H(x^i)$ als (Vektor-) Störterm (dies entspricht dem Auftreten einer externen Kraft). Durch die Stochastizität der $g_{ik}$ sind die hier eingehenden Christoffelsymbole ebenfalls stochastisch. Andererseits kann man [85,94] für Zufallsprozesse auf klassische Art ein verallgemeinertes dynamisches System ansetzen, der Art

$$dx^\alpha(t) = f(x^\alpha, t)\, dt + w(x^\alpha, t)\, d\sigma(t) ,$$

wobei $\alpha = 1,2,\ldots,n-1$ und t explicit geschrieben ist. Schreibt man diese letzte Beziehung in den n-dimensionalen Formalismus um, berücksichtigt die Beziehung

$$ds = \sqrt{g_{oo}}\, dt$$

und führt eine formale Differentiation nach s durch, so erhält man zusätzlich zu den obigen geodätischen Gleichungen einen Divergenzterm, so daß folgt

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \Box^n \cdot w \frac{dx^i}{ds} = H(x^i) .$$

Hierbei bedeutet $\Box^n$ eine n-dimensionale Divergenz, angewandt auf den (vektorwertigen) stochastischen Term aus dem oben eingeführten verallgemeinerten dynamischen System. Diese zusätzliche Störung der Geodätischen kann interpretiert werden als Quellenterm des Prozesses.

Er ist stochastischer Natur und berücksichtigt Neuzugänge auf I (in der Umgebung eines Prozesses). Der Prozeß ist quellenfrei,falls w koordinatenunabhängig ist. Das heißt,w ist konstant,falls es lokal keine Änderung der Personenkonfiguration auf I gibt. Es stellt also w Vorgänge dar,die vorhandene Prozesse stören bei Festlegung einer Anfangsmetrik am (lokalen) Rand von I beim Eintritt einer Person (Influx auf I). Man erkennt jedoch,daß für rechnerische Belange,die Divergenz unschwer mit dem rechten Vektorterm zusammengefaßt werden kann und die äußere Form der Geodätischen nicht wesentlich beeinflußt.

1.2.6 Bemerkung 2: Ist die Metrik konstant (flacher Raum),so ist trotzdem typisch charakterisiert. Dieser Trivialfall mit seiner Minkowski-artigen Geometrie entspricht beispielsweise dem Zustand der Planung einer Gesellschaft vor ihrer ersten Aktivität. Offenbar haben alle Gesellschaften den flachen Raum als Initialfall.

1.2.7 Man kann die vorhergehenden Überlegungen in einem Kausalprinzip der Versicherung zusammenfassen. Denn es werden nur bestimmte Geodätische realisierbar sein. Gewöhnlich werden Geodätische von Personen zeitartig sein ($ds > 0$). Nullgeodätische stellen einen Spezialfall dar ($ds = 0$): Hierbei müßten für eine Person alle Abstände optimal klein werden,denn sie hätte die maximal mögliche Reaktionsgeschwindigkeit (2) erreicht. Konsequent können sich Personen nicht auf raumartigen Geodätischen ($ds < 0$) bewegen,denn dies bedeutete eine Kausalverletzung (praktisch würde dann eine Person einen Versicherungszustand einnehmen, bevor sie in I eingetreten ist. Zudem muß die zeitliche Kausalität erhalten bleiben (niemand kann in seine eigene Vergangenheit zurückkehren). Deshalb formulieren wir das

Kausalprinzip: Es gibt keine geschlossenen nicht-raumartigen Kurven auf I.

Diese Aussage läßt sich abschwächen im

Chronologieprinzip: Es gibt keine geschlossenen zeitartigen Kurven auf I.

1.2.8 Im Vorgriff sei bereits ein Begriff eingeführt, der sich als Deutung der Ableitungen nach dem Kurvenparameter anbietet: Der Term $dx^i/ds$ kann als n-dimensionale Geschwindigkeit im Versicherungsraum gedeutet werden. Separieren wir die zeitliche Komponente heraus, so bekommen wir $u = (v,1)$, wobei 1 eine (normierte) konstante Maximalgeschwindigkeit auf I bedeutet und v die n-1-dimensionale "versicherungsörtliche" Geschwindigkeit. Wir nennen $dx^i/ds =: u$ die Reaktionsgeschwindigkeit einer Person auf I bezüglich ihrer Eigenaktion. Konsequent heißt $d^2x^i/ds^2 =: \dot{u}$ die Reaktionsbeschleunigung. Letztere gibt Änderungen des Verhaltens einer Person auf I an.

1.2.9 (Äquivalenzprinzip der Entscheidungen im Versicherungsraum) Bei der Änderung der Eigenaktion einer Person kann man nicht feststellen, ob diese von externen Einflüssen hervorgerufen wurde oder von eigenen Meinungsänderungen.

Dieses Prinzip verallgemeinert die Aussage des Axioms 4, es widerspricht nicht der Tatsache, daß man externe Einflüsse anderer Gesellschaften partiell eingrenzen kann, denn man behandelt hierbei wettbewerbstheoretische Fragen anderer Gesellschaften, nicht entscheidungstheoretische eigener Kunden.

## 1.3 Stochastische Dynamik

1.3.1 Wir setzen jetzt eine skalare Funktion an, von der Art

$$E = \frac{1}{2} g^{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \quad ,$$

wobei der Punkt Ableitung nach s bedeutet (vgl.o.). Wir nennen E die Energiefunktion des Prozesses. Sie hängt offenbar von der Reaktionsgeschwindigkeit einer Person ab. Externe Einflüsse wollen wir durch die Funktion $V = V(x^i)$ (skalar) berücksichtigen, wir nennen sie das Potential des äußeren Feldes, das auf die Person wirkt. In der Tat handelt es sich hier um eine Analogie zum Fall wechselwirkender Kraftfelder (vgl. vorn).

1.3.2 Die gesamte Energie einer Person wird sich also zusammensetzen aus einem Term der Form

$$H = E + V,$$

der im zeitunabhängigen Fall gerade den Hamiltonian der Person liefert. Insbesondere kann man H als Integral über eine Dichtefuntion auffassen, der Art

$$H = \int_{M \subset I} \tilde{H} \, dv(M)$$

Nach bekannten Variationsmethoden kann man zeigen, daß es einen nxn-Tensor $T^{ik}$ gibt, so daß $T^{ik}{}_{;k}$ verschwindet und $T^{oo} = \tilde{H}$. Man nennt $T^{ik}$ den Energie-Impuls-Tensor [25,23]. Wie bereits erwähnt, bestimmt $T^{ik}$ die rechte Seite der Feldgleichungen, so daß gilt

Geometrie $\Leftrightarrow$ Energie

(vgl. Axiom 5).

1.3.3 Ist die Metrik orthogonal,so bekommt man aus den Feldgleichungen n skalare Gleichungen,aus denen sich die metrischen Komponenten bestimmen lassen. In (2) ist ein vereinfachtes Beispiel diskutiert.

1.3.4 Aus 1.3.1 erkennt man unmittelbar,daß $E > 0$, zudem bedeutet die verschwindende Tensordivergenz in 1.3.2 eine n-dimensionale Kontinuitätsgleichung (also Energieerhaltung). Das heißt explicit,daß die Entscheidungen von Personen stets eines externen Reizes bedürfen (wobei man die Analogie nicht beliebig ausdehnen kann,denn es gibt hier kein Aktion-gleich-Reaktions-Gesetz!). In 1.4 wird der Hamiltonsche Begriff weitgehender eingeführt,der Erhaltungssatz ist dann einfach eine Konsequenz geeigneter Momentewahl im Rahmen der eingehenden Kohomologie.

## 1.4 Transitionen als Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

In der letzten Zeit ist, ebenfalls gewachsen aus dem Konzept der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, eine etwas andere Richtung dieser Theorie intensiv ausgebaut worden, die man im Sprachgebrauch unter dem Sammelnamen "Globale Analysis" zusammenfaßt. Der wesentliche Unterschied zur bisher betriebenen Riemannschen Geometrie ist kurz wie folgt zu beschreiben: Die Mannigfaltigkeit I wurde konzeptiv als objektorientiert eingeführt, d.h., (im systemtheoretischen Sinne) relevante Details wurden anhand zunehmender Struktur auf I gewissermaßen aufgeprägt. Die globale Analysis hat eine verschiedene Aufgabenstellung in sofern, als mehr nach Eigenschaften von Modellen als Konzeption und nicht so sehr nach "physikalischen" Eigenschaften phänomenologischer Systeme gefragt wird. Singularitäten bedeuten deshalb auch nicht so sehr gewisse Unvollständigkeitskriterien geometrischer Kurven, als vielmehr Instabilitäten eines Modells, das vorgegebene Effekte beschreiben soll. In diesem Sinne ist die Einführung einer symplektischen Struktur auf dem Kotangentenbündel von Mannigfaltigkeiten von zentraler Bedeutung. Die Aussage, daß eine solche Struktur stets existiert zusammen mit einem (Hamiltonian) Vektorfeld, das die Struktur erhält, schafft so eine Uniformität des Mannigfaltigkeitskonzeptes unabhängig vom jeweiligen Modell (und zugeschnitten auf ein natürlicheres unendlich-dimensionales Behandlungsmodell). Wir werden deshalb später (3) sowohl Singularitäten in beiden Bereichen (dem phänomenologischen und dem im Sinne von Thom, d.h. dem einer allgemeinen Modelltheorie) untersuchen. Bezüglich des assoziierten Risikos im Versicherungsbereich wird sich ein ähnliches Resultat erreichen lassen.

Nach der Diskussion einer symplektischen Struktur für I werden Begriffe der Thomschen Terminologie bereitgestellt.

Wir folgen hierbei im wesentlichen der Linie von [3,4,6].

1.4.1 Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(M,\omega)$, wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit bedeutet und $\omega$ eine abgeschlossene und nicht-entartete 2-Form auf M ist.

1.4.2 Theorem: (Darboux) An jedem Punkt einer symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es Koordinaten $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$, so daß

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i \quad .$$

1.4.3 Das Kotangentenbündel $T^*M$ läßt eine natürliche symplektische Struktur zu, auf die folgende Weise: Sei $\dot{\alpha} \in T(T^*M)$, $\alpha \in T^*M$ der Basispunkt und $\dot{x} \in TM$ Bild unter der Tangenten der Projektion $T^*M \to M$. Dann ist $\alpha \in T_x^*M$ und auch $\dot{x} \in T_xM$ für ein $x \in M$. Sei eine 1-Form $\hat{Q} \in \Omega^1(T^*M)$ durch $\hat{Q}(\dot{\alpha}) := \langle \alpha, \dot{x} \rangle$ definiert und ebenso eine 2-Form $\omega_Q := -d\hat{Q}$. Dies sind die kanonischen 1-bzw.2-Formen von $T^*M$. Falls $M \subset R^n$ (offen) mit Koordinaten q und (q,p) natürlich assoziierte zu $T^*M = M \times R^n$, so ist $\hat{Q} = \sum p_i\, dq_i$.

1.4.4 Sei $\sigma$ eine 2-Form, $d\sigma = 0$ und $\dim \ker(\sigma)_x = 1$ für alle $x \in M$. Dann heißt das Paar $(W,\sigma)$ Evolutionsraum, wenn immer W Mannigfaltigkeit ist. Ein Orbit von $(W,\sigma)$ ist ein Blatt der Foliation mit $\ker(\sigma)_x$ als ihren Tangentialraum bei $x \in W$. Das heißt, falls $\Theta \subseteq M$ Orbit von $(W,\sigma)$ ist, so ist $\Theta$ eine zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit und $T_x\Theta = \ker(\sigma)_x$ für alle $\sigma$. Der Orbitraum eines Evolutionsraumes ist symplektische Mannigfaltigkeit.

1.4.5 Ein parameter-unabhängiges Hamiltonsches System ist ein Tripel $(M,\omega,H)$ mit $(M,\omega)$ als symplektische Mannigfaltigkeit und H als reellwertige Funktion auf M. Das eindeutige Vektorfeld X auf M mit $i_X\omega = dH$ heißt

Hamiltonian Vektorfeld des Systems. In symplektischen Koordinaten (p,q) (vgl.o.) folgen die bekannten Hamilton-Gleichungen.

Man kann jetzt eine Fülle inhaltlicher Struktur über die soeben eingeführten Begriffe betrachten, die im Rahmen dieser Arbeit zu weit führten, zumal sie später auch nicht explicit benötigt werden. Auf nähere Details sei an dieser Stelle auf [12] und die dortigen Literaturangaben verwiesen.

Bevor wir nun die symplektische Struktur für I interpretieren, wollen wir zunächst noch den Zusammenhang zur Kohomologie-Theorie kurz ansprechen.

1.4.6 Sei M Mannigfaltigkeit und $\omega$ abgeschlossene 2-Form auf M, sei $\mathfrak{X}(M,\omega)$ die Menge aller Vektorfelder (VF) $X \in \mathfrak{X}(M)$, die $\omega$ invariant lassen, d.h. $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Man sieht leicht, daß $\mathfrak{X}(M,\omega)$ Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{X}(M)$ ist, d.h. insbesondere, daß $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M,\omega)$, wenn immer $X,Y \in \mathfrak{X}(M,\omega)$. Mit der Cartanschen Beziehung (0.4.10) und $d\omega = 0$ folgt, daß $\mathfrak{X}(M,\omega)$ die Menge aller $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist, so daß $i_X\omega$ abgeschlossen ist.

1.4.7 Ist $i_X\omega$ exakt, so heißt X Hamiltonsches Vektorfeld (vgl. 1.4.5), jede Lösung H von $i_X\omega = dH$ heißt Hamiltonian für X. Die Menge aller H, für die diese Beziehung gilt, zumindest für einige X, heißt Poisson-Algebra von $\omega$ : $\mathfrak{H}(M,\omega)$. Die Poisson-Algebra ist Lie-Algebra, wobei die Klammeroperation wohldefiniert ist durch

$$\{H_1,H_2\} = \omega(X_1,X_2) \quad ,$$

wobei $H_1,H_2$ Hamiltonians für $X_1,X_2$ sind. Es ist insbesondere $\{H_1,H_2\}$ Hamiltonian für $[X_1,X_2]$.

1.4.8 Es sei noch die Klammeroperation (Poisson-Klammer) definiert. Wir führen zwei Abbildungen ein, $\flat$ und $\sharp$, der folgenden Art:

$\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$, so daß

$$X \longmapsto X^\flat = i_X \omega \quad \text{und}$$

$\# : \mathfrak{X}^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, so daß

$$\alpha \longmapsto \alpha^\# = \tfrac{1}{2}\, \omega_\flat^{-1}(\alpha) ,$$

wobei $\omega_\flat : TM \longrightarrow T^*M$, mit $\omega(m)_\flat (e)e' = \omega(m)(e,e')$, $e,e' \in T_mM$.

Ist dann $(M,\omega)$ symplektische Mannigfaltigkeit und sind $\alpha,\beta \in \mathfrak{X}^*(M)$, dann ist die Poisson-Klammer definiert als 1-Form

$$\{\alpha,\beta\} = - [\alpha^\#, \beta^\#]^\flat \quad ,$$

so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} & \xrightarrow{-[,]} & \mathfrak{X} \\ \downarrow \flat\times\flat & & \downarrow \flat \\ \mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^* & \xrightarrow{\{,\}} & \mathfrak{X}^* \end{array}$$

1.4.9 Sei $\mathcal{L}$ Lie-Algebra und M $\mathcal{L}$-Mannigfaltigkeit mit Aktion $\mathcal{L} \to \mathfrak{X}(M)$. Sei $\omega$ abgeschlossene 2-Form auf M und $\mathcal{L}$-invariant: $\pounds_{A_M} \omega = 0 \quad \forall\ A \in \mathcal{L}$. Ein Moment für $(M,\omega)$ ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L} \to \mathcal{H}(M)$, so daß $A \longmapsto J_A$, die jedem $A \in \mathcal{L}$ einen Hamiltonian für das Vektorfeld $A_M$ zuordnet, also gilt

$$i_{A_M} \omega = d J_A \quad , J_A \in \mathcal{H}(M,\omega) .$$

1.4.10 Man kann dann zeigen, daß ein Moment stets dann notwendig Lie-Algebren-Homomorphismus ist, falls $\omega$ invariantes Potential hat [16]. Sei $\Lambda^k$ die Menge aller k-linearen antisymmetrischen reellwertigen Abbildungen auf $\mathcal{L}$ und sei eine Abbildung $d : \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$

definiert durch

$$df(A_0,\ldots,A_k) = -\sum_{i<j}{}' (-1)^{i+j} f([A_i,A_j],A_0,\ldots,A_k)$$

mit $A_0,\ldots,A_k \in \mathcal{L}$ und $f \in \Lambda^k$ . Dann heißt f Kozyklus iff df = 0 und Korand iff f = dg für ein $g \in \Lambda^{k-1}$ . Jeder Korand ist offenbar Kozyklus, denn dd = 0. Der Vektorraum der Kozyklen mod dem Raum der Koränder werde $H^k(\mathcal{L})$ geschrieben und heißt k-ter Kohomologie-Raum von $\mathcal{L}$ .+)

1.4.11 Man kann sich klar machen, daß jeder Abbildung $\mathcal{L} \to \mathcal{H}(M,\omega)$ eine der Art $M \to \mathcal{L}^*$ (die duale Lie-Algebra) unterliegt (und umgekehrt) mittels der Beziehung

$$J_A(x) = \langle J(x), A \rangle$$

für $x \in M$ und $A \in \mathcal{L}$ . Dieses bildet die Grundlage für die im System immanenten Erhaltungssätze: Es gilt nämlich das

Theorem: (Noether) Sei $(W,\sigma)$ Evolutionsraum und $\mathcal{L} \to \mathfrak{X}(W): A \mapsto A_W$ Lie-Aktion, so daß $\mathfrak{L}_{A_W}\sigma = 0$ für alle $A \in \mathcal{L}$ . Dann ist jedes Moment der Form

$$J: W \to \mathcal{L}^* \quad \text{für } (W,\sigma)$$

konstant entlang der Orbits von $(W,\sigma)$++).

---

+) Die elegante Struktur dieser Formulierung erkennt man anhand der Beziehung $\sum (-1)^\lambda N_\lambda = \chi(M) = \sum (-1)^\lambda b_\lambda$ , wobei $N_\lambda$ die Anzahl der kritischen Punkte vom Index $\lambda$ einer Abbildung bedeutet, $\chi$ die Euler-Charakteristik und $b_\lambda$ die $\lambda$-te Betti-Zahl ( = rg $H_\lambda$ ). Nach Pontrjagin ist $H_\lambda$ Charaktergruppe von $H^\lambda$ . Hierdurch bekommt man einen Zusammenhang zwischen Kohomologie und Morse Theorie. Zudem sind noch alle Kohomologien einander isomorph (insbesondere der de Rhamschen).

++) Dies ist eine elegante Darstellung des Konzeptes 1.3.2

1.4.12 Wir wenden uns nun der symplektischen Struktur auf $T^*I$ zu. Dazu liften wir Geodätische auf I auf natürliche Weise in TI durch (x,u) mit $u := \dot{x}$, so daß sich dort eine Kurve ergibt, deren Tangentenvektor die Form

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} u^j u^k \frac{\partial}{\partial x^i}$$

annimmt. Geliftete Geodätische bilden eine Kongruenz von Kurven auf TI, nämlich die Integralkurven des obigen Vektors. Das Kotangentenbündel $T^*I$ ist die Familie aller Paare (x,p), mit p als Kotangentenvektor bei x, in Koordinaten $p = p_i\, dx^i$ mit $(dx^i)$ als Basis dual zu $(\partial / \partial x^i)$.

1.4.13 Sei f glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, dann kann gezeigt werden, daß die 2-Form $\omega$, die die symplektische Struktur auf $T^*I$ definiert, koordinatenunabhängig ist. Um jetzt zwischen Tangenten- und Kotangentenbündel eine Korrespondenz herzustellen, bedarf es der naheliegenden zusätzlichen Struktur, der Legendre-Abbildung, die gerade durch einen zeitunabhängigen Lagrangian L auf TI gegeben ist:

$$\Lambda : (x,u) \mapsto (x, \frac{\partial L}{\partial u^i}\Big|_{(x,u)} dx^i).$$

1.4.14 Es heißt L regulär, falls $\partial^2 L / \partial u^i \cdot \partial u^k$ überall nichtsingulär ist, das ist gerade die Bedingung dafür, daß $\Lambda_*$ Isomorphismus von Tangentialräumen an jedem Punkt auf I ist. Sei L regulär, so nehmen die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen die folgende Form an:

$$\dot{u}^i = g^{ik} \left( \frac{\partial L}{\partial x^k} - u^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial x^m} \right).$$

Die Lösungskurven dieser Beziehung sind gerade die Projektionen der Integralkurven auf I des folgenden Vektorfeldes:

$$\Gamma = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + g^{ik} \left( \frac{\partial L}{\partial x^k} - u^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial x^m} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Als Spezialfall (Riemannsch) für Geodätische reduziert sich L gerade auf $\frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$ .

1.4.15 Hat $\Lambda$ zusätzlich ein glattes Inverses, so folgt sofort

$$\Lambda_* \Gamma = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} ,$$

wobei H als Funktion auf $T^* I$ der zu L assoziierte Hamiltonian ist. Deshalb erfüllen die Integralkurven von $\Lambda_* \Gamma$ die Hamiltonschen Gleichungen.

1.4.16 Berücksichtigen wir Cartans Beziehung und $d\omega = 0$, so gilt

$$i_{\Lambda_* \Gamma} \omega = - dH$$

und mithin

$$\pounds_{\Lambda_* \Gamma} \omega = d(-dH) = 0.$$

Das heißt, $\omega$ bleibt invariant längs der Integralkurven von $\Lambda_* \Gamma$ . Tragen wir diese Information auf TI zurück, so folgt

$$\pounds_{\Gamma} ( \Lambda^* \omega ) = 0 ,$$

wobei $\Lambda^* \omega$ den Pull-back von $\omega$ auf TI bedeutet mit

$$( \Lambda^* \omega )(\xi, \eta) = \omega ( \Lambda_* \xi , \Lambda_* \eta )$$

für irgendzwei Vektoren $\xi, \eta$ bei (x,u) in TI.

1.4.17 Mit Sammlung der Ergebnisse und unter Berücksichtigung der Koordinatendarstellung der Art

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \Xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} ,$$

$$\eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + H^i \frac{\partial}{\partial u^i} ,$$

zeigt eine einfache Rechnung, daß wir folgende Beziehung für $\xi^i$ erhalten:

$$\frac{D^2 \xi^i}{\partial t^2} + R^i{}_{jk\ell}\, \dot\gamma^j \dot\gamma^k \xi^\ell = 0 .$$

Das heißt, daß die projizierten Vektorfelder $\Pi_* \xi$ und $\Pi_* \eta$, definiert entlang der Geodätischen $\gamma$, Jacobi-Felder sind und insbesondere gilt

$$(\Lambda^* \omega)(\xi, \eta) = g_{ik} \left( \eta^i \frac{D\xi^k}{\partial t} - \xi^i \frac{D\eta^k}{\partial t} \right),$$

man nennt dies die Identität von Lagrange.

1.4.18 Die Jacobi-Felder dienen der wichtigen Einführung konjugierter Punkte auf I: Es heißen zwei Punkte p,q auf einer Geodätischen $\gamma(t)$ auf I zueinander konjugiert auf $\gamma$, falls es ein nichttriviales Jacobi-Feld gibt, das bei p und q verschwindet. Das heißt, man kann sich unter Jacobi-Feldern ein Maß für den Abstand zweier benachbarter Geodätischer vorstellen (genauer noch für die Form und Entwicklung eines solchen Abstandes), denn konjugierte Punkte stellen gewissermaßen Schnittpunkte von (konvergierenden) Geodätischen dar, und man wird bereits intuitiv einsehen, daß bei nichtverschwindender Krümmung stets solch ein Effekt erreicht werden kann.

1.4.19 Stellen wir ein Jacobi-Feld dar durch eine 3x3-Matrix der Form

$$\xi^i = A_{ik} \frac{d}{ds} \xi^k$$

(man lasse sich nicht stören an der wechselseitigen Verwendung von t und s als affine Parameter), dann kann man drei Größen hierdurch definieren

$$\theta = \det^{-1} \underline{A} \cdot \frac{d}{ds} \det \underline{A} ,$$

$$\sigma_{ik} = A^{-1}{}_{j(k} \frac{d}{ds} A_{i)j} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \theta ,$$

$$\omega_{ik} = A^{-1}{}_{j[k} \frac{d}{ds} A_{i]j} ,$$

die die Expansion des geodätischen Abstandes, die Verformung und Verdrehung beschreiben. Insbesondere gilt für $\theta$ die Beziehung von Raychaudhuri [23] :

$$-\frac{d}{ds} \theta = R_{ik} v^i v^k + 2\sigma^2 + \frac{1}{3} \theta^2 ,$$

für einen zeitartigen Vektor V. Im Anhang A.1 werden wir auf diese Größen noch einmal eingehen.

Wir werden jetzt einige Aspekte der Theorie der Jetbündel behandeln, etwa der Linie von Golubitskij und Guillemin [4] und Thom [3] folgend. Die Begriffe Jetbündel, Transversalität und Stabilität werden zusammen mit einigen Aspekten der Morse Theorie bereitgestellt.

1.4.20 Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $p \in M$. Seien ferner zwei glatte Abbildungen f,g von M nach N gegeben, so daß $f(p) = g(p) = q$. Man sagt dann, f habe Kontakt erster Ordnung mit g bei p, falls $f_{*p} = g_{*p}$. Allgemein sagt man, f habe k-ten Kontakt mit g bei p, falls $f_* : TM \to TN$ (k-1)-ten Kontakt mit $g_*$ hat in jedem Punkt von $T_pM$. Diese Beziehung bringen wir durch $f \sim_k g|_p$ zum Ausdruck. Offenbar ist $\sim_k$ eine Äquivalenzrelation.

1.4.21 Sei $J^k(M,N)_{p,q}$ die Menge der Äquivalenzklassen unter $\sim_k$ von Abbildungen $f: M \to N$ mit $f(p) = q$. Sei ferner $J^k(M,N) = \bigcup J^k(M,N)_{p,q}$, die Vereinigung über alle p,q genommen. Dann heißt ein Element aus $J^k(M,N)$ k-jet von Abbildungen von M nach N.

1.4.22 Sei $\sigma$ ein k-Jet. Dann gibt es ein $p \in M$ und ein $q \in N$, für die $\sigma$ in $J^k(M,N)_{p,q}$ ist. Es heißt p die Quelle (source) von $\sigma$ und q das Ziel (target). Die Abbildung $\alpha : J^k(M,N) \to M$, so daß $\sigma \mapsto$ Quelle($\sigma$), heißt Quellenabbildung. Analog heißt $\beta : J^k(M,N) \to N$ Zielabbildung.

1.4.23 Ist eine Abbildung f wie oben gegeben, so gibt es eine hierzu kanonische Abbildung $j^k f: M \to J^j(M,N)$, die k-Jet von f heißt und durch $j^k f(p) = [f] \in J^k(M,N)_{p,f(p)}$ für alle $p \in M$ definiert ist.

Man kann zeigen, daß dies gerade eine invariante Art ist, Taylorentwicklungen von f in p bis k-ter Ordnung darzustellen. Insbesondere ist $j^k$ glatt.

1.4.24 Lemma: Sei $U \subset R^n$ (offen) und $p \in U$. Seien f,g glatte Abbildungen von U nach $R^m$. Dann gilt $f \sim_k g$ bei p, iff

$$\frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j} f_i(p) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j} g_i(p) ,$$

für jedes j mit $|j| \leq k$ und $1 \leq i \leq m$, wobei $f_i, g_i$ Koordinatenfunktionen bedeuten, die durch f,g bestimmt sind. Die x sind Koordinaten auf U.

Beweis: Geht durch vollständige Induktion in k (vgl. [4] S.38 ) □ .

1.4.25 Korollar: Es haben f und g Kontakt k-ter Ordnung bei $p \in U \subset R^n$, iff die Taylorentwicklungen bis zur k-ten Ordnung von f und g identisch sind in p.

1.4.26 Theorem: Seien M,N Mannigfaltigkeiten mit dim M = n und dim N = m. Dann ist $J^k(M,N)$ eine glatte Mannigfaltigkeit, wenn immer M,N glatt sind, mit der Dimension

$$\dim J^k(M,N) = m + n + \dim B^k{}_{n,m} ,$$

wobei $B^k{}_{n,m} := \bigoplus A^k{}_n$ bedeutet und $A^k{}_n$ der Vektorraum der Polynome in n Variablen vom Grad $\leq k$ ist (der konstante Term sei dabei Null gesetzt).

Beweis: siehe [4] S.40 □ .

1.4.27 Es ist $J^k(M,N)$ im allgemeinen Vektorbündel, falls $N = R^m$. Insbesondere ist $J^1(M,N)$ kanonisch isomorph zu Hom(TM,TN), wobei der Isomorphismus durch $\Psi_p : f \mapsto f_{*p}$ gegeben ist (vgl.a. Bem. [4] ,S.41 ).

1.4.28 Seien M,N glatte Mannigfaltigkeiten. Sei $C^\infty(M,N)$ die Menge der $C^\infty$-Abbildungen von M nach N. Zudem sei k eine vorgegebene ganze Zahl und sei $U \subset J^k(M,N)$. Dann definieren wir die Menge

$$\mathcal{M}(U) := \{ f \in C^\infty(M,N) \mid j^k f(M) \subset U \} .$$

Die Familie von Mengen $\{\mathcal{M}(U)\}$ bildet eine Basis für eine Topologie auf $C^\infty(M,N)$. Man nennt diese Topologie die Whitney-$C^k$-Topologie.

Ihre offenen Untermengen seien mit $W_k$ bezeichnet. Dann ist die Whitney-C$^\infty$-Topologie diejenige auf $C^\infty(M,N)$, deren Basis $W = \bigcup W_k$ ist. Letztere ist wohldefiniert, denn $W_k \subset W_\ell$ ,wenn immer $k \leq \ell$ .

1.4.29 Sei F topologischer Raum. Dann heißt eine Untermenge $G \subset F$ residual,falls sie ein abzählbarer Schnitt offener dichter Untermengen von F ist. Es heißt F Baire-Raum,falls jede residuale Menge aus F dicht ist.

1.4.30 Satz: Seien M,N glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist $C^\infty(M,N)$ ein Baire-Raum in der Whitney-C$^\infty$-Topologie.

Beweis: siehe [4] ,S.44 □ .

1.4.31 Seien M,N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $f:M \to N$ glatt. Sei W Untermannigfaltigkeit von N und sei $p \in M$. Dann sagt man,f schneide W transversal bei p,geschrieben $f \pitchfork W|_p$ ,falls entweder $f(p) \notin W$ oder

$$f(p) \in W \text{ und } T_{f(p)}N = T_{f(p)}W + f_{*p}(T_pM) \quad .$$

Falls $A \subset M$,dann schneidet f W transversal auf A,falls $f \pitchfork W|_p$ für alle $p \in A$. Es gilt $f \pitchfork W$,falls $f \pitchfork W$ auf ganz M.

Beispiel: Seien $M = R = W, N = R^2$ und $f(p) = (p,p^2)$. Dann gilt $f \pitchfork W$ bei allen p,die nicht verschwinden.

1.4.32 Satz: Seien M,N glatte Mannigfaltigkeiten,sei $W \overset{C}{\underset{M}{}} N$. Sei ferner dim W + dim M < dim N. Seien ferner $f:M \to N$ glatt und $f \pitchfork W$. Dann gilt $f(M) \cap W = \emptyset$ .

Beweis: siehe [4] ,S.51 □ .

1.4.33 Lemma: Seien M,N,W und f wie in 1.4.32. Seien ferner $p \in M$ und $f(p) \in W$. Gibt es dann eine Umgebung U(f(p)) in N und eine Submersion $\phi : U \to R^k$ mit k gleich der Kodimension von W und so,daß $W \cap U = \phi^{-1}(0)$,dann gilt $f \pitchfork W|_p$ ,iff $\phi \circ f$ eine Submersion ist bei p.

Beweis: siehe [4] ,S.52 □ .

1.4.34 Theorem: Seien M,N,W und f wie in 1.4.32 mit $f \pitchfork W$. Dann ist $f^{-1}(W)$ Untermannigfaltigkeit von M. Es gilt zudem codim $f^{-1}(W)$ = codim W. Insbesondere besteht $f^{-1}(W)$ nur aus isolierten Punkten, falls dim M = codim W.

Beweis: siehe [4], S.52 □ .

1.4.35 Theorem (Thomscher Transversalitätssatz): Seien M,N,W wie in 1.4.32 und gelte zudem

$$T_W = \{ f \in C^\infty(M,N) \mid j^k f \pitchfork W \} \quad .$$

Dann ist $T_W$ residuale Untermenge von $C^\infty(M,N)$ in der $C^\infty$-Topologie.

Bemerkung: Zum Beweis [4] benutzt man insbesondere folgendes Lemma: Sind M,N glatte Mannigfaltigkeiten und $f:M \to N$ glatt und $W \subseteq_H N$ mit $W' \subset W$, so gilt $f \pitchfork W$ auf W', falls für jedes $p \in M$ mit $f(p) \in W'$ gilt: $f \pitchfork W|_p$.

1.4.36 Korollar: Sind M,N,W wie oben, dann ist die Menge der Abbildungen aus $C^\infty(M,N)$, die W transversal schneiden, dicht in $C^\infty(M,N)$. Ist W abgeschlossen, so ist diese Untermenge zudem offen. Man nennt diesen Sachverhalt auch elementares Transversalitätstheorem.

1.4.37 Bemerkung: Die vorgenannten Beziehungen und Ergebnisse finden zum Beispiel Anwendung in der Theorie der Einbettungssätze (vgl. die Zusammenfassung in [4] oder Bemerkungen in [1] ). Auf sie wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen.

1.4.38 Sei $f:M \to N$ Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Wir sagen, f habe eine Singularität vom Typ $S_r$ bei $p \in M$, falls $f_{\nmid p}$ im Rang um r fällt: rg $f_{\nmid p}$ = min(dim M, dim N) − r. Die Menge der Singularitäten vom Typ $S_r$ von f sei mit $S_r(f)$ bezeichnet. Sei ferner $S_r := \{\sigma \in J^1(M,N) \mid \operatorname{corg} \sigma = r\}$, offenbar gilt dann $S_r(f) = (j^1 f)^{-1} S_r$ +).

---

+) Hierauf beruht die Thom-Boardman Klassifizierung von Singularitäten (vgl. [3,4] und [5] ).

1.4.39 Sei s eine Singularität von $f:M \to R$. Es heißt s nicht-entartet, falls $j^1 f \pitchfork S_1$ bei p, $S_1$ wie oben. Es heißt f Morse-Funktion, falls alle Singularitäten von f nicht-entartet sind.+)

1.4.40 Theorem: Sei M glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Menge der Morse-Funktionen eine offene dichte Untermenge von $C^\infty(M,R)$.

Beweis: Folgt aus dem Thomschen Transversalitätssatz (1.4.35) □ .

1.4.41 Satz: Sei $f:M \to R$ glatt mit nichtentartetem kritischen Punkt p. Dann gibt es eine Umgebung V(p) in M, so daß keine anderen kritischen Punkte von f in V sind. Das heißt, nicht-entartete kritische Punkte sind isoliert.

Beweis: Man beachte $\operatorname{codim} S_1 = \dim M$ und (1.4.35) □ .

1.4.42 Satz: Sei $U \subset R^n$ offen und $f:U \to R$ glatt. Dann hat f einen nicht-entarteten kritischen Punkt bei p, iff der Hess(f) bei p nicht-singulär ist++).

1.4.43 Satz: Sei B eine symmetrische, nicht-entartete Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V der Dimension n. Dann gibt es eine ganze Zahl $k \leq n$ und eine Basis $\vartheta$ von V, so daß $B(\vartheta_i, \vartheta_j) = s_i \delta^i_j$ mit $s_i = -1$, falls $i \leq k$ und $= 1$ sonst. Es heißt k Index von B.

1.4.44 Lemma: Sei p nicht-entarteter kritischer Punkt von $f:M \to R$. Dann ist Index(f) bei p gerade gleich dem $\operatorname{Index}(\operatorname{Hess}(f)_p)$.

---

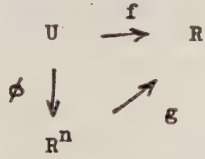
+) Man vergleiche hierzu die Fußnote auf S.63. Alle diese Ergebnisse liefern uns gerade eine exaktere Einführung aller der Zusammenhänge, die den vereinigenden Charakter der Methodik offenbaren, wie auch auf S.59 angedeutet.

++) Man kann den Hessian an einem kritischen Punkt invariant definieren mittels der intrinsischen Ableitung [4], S.64.

1.4.45 Theorem (Morse): Sei $g:R^n \to R$ definiert durch

$$g(x_1,\ldots,x_n) = c - (x_1^2 + \ldots + x_k^2) + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 ,$$

wobei c eine Konstante bedeutet. Dann hat g einen nicht-entarteten kritischen Punkt vom Index k im Ursprung und keine anderen Singularitäten. Ist $f:M \to R$ glatt mit nicht-entartetem kritischen Punkt vom Index k, dann gibt es eine Umgebung U(p) und eine Karte $\phi : U \to R^n$, bei p zentriert, so daß das Diagramm




kommutiert, mit $c = f(p)$. Der ausführliche Beweis hierzu findet sich in [4] S.66ff □ .

Wir können jetzt Singularitäten Geodätischer auf I, sowie Singularitäten im Sinne von Thom (1.4.38) diskutieren. Zunächst muß jedoch unser Modell dadurch vervollständigt werden, als Wechselwirkungen zwischen Personen zugelassen werden.

(2) Wechselwirkungen zwischen Personen

Wie bereits erwähnt, bietet sich zur Behandlung von Wechselwirkungen zwischen Personen auf I, die jetzt ausführlich diskutiert werden sollen, eine Analogie aus der Physik an. Haben wir bislang Personen in Analogie gesehen zu freien Teilchen auf der Raum-Zeit, so werden wir sie jetzt auffassen als wechselwirkende Teilchen. Eigentlich müßte man sagen, als Teilchen, die wechselwirken können, denn die zusätzliche Qualität, die Personen verliehen bekommen, entspricht der Ladung von Teilchen. Explicite Wechselwirkungen stehen dabei nicht so sehr im Vordergrund der Behandlung, wie die Einflüsse dieser zusätzlichen Qualität auf die Riemannsche Metrik auf I. Die Selbstwechselwirkung von Personen mit der Geometrie kam in der persistenten Nichtlinearität der Feldgleichungen zum Ausdruck, die wir einfach als Axiom 5 eingeführt haben. Wir werden jetzt eine rechte Seite für die Feldgleichungen einsetzen, so daß diese Energie von Personen gerade die ist, die für Wechselwirkungen mit anderen Personen verantwortlich wird.

Wie ebenfalls erwähnt, kann man die Analogie zur Physik nicht allzu weit treiben. Zuvor lag das am stochastischen Charakter der Prozesse und am empirisch bekannten Stichprobenverhalten größerer Populationen. Zudem pflegen Teilchen in der Physik ihre Wechselwirkungen nicht nach subjektiven Entscheidungskriterien auszurichten, jedoch kann man umgekehrt Entscheidungen einen Feldcharakter verleihen, wenn man die Stochastizität (und empirischen Grenzen des Modells) berücksichtigt.

## 2.1 Eine Feldtheorie der Wechselwirkungen

Die grundlegende Idee ist, daß Wechselwirkungen zwischen Personen sich als Einflüsse positiver oder negativer Art, auf die Geometrie der Versicherungsmannigfaltigkeit einer Gesellschaft äußern. Einflüsse dieser Art werden also mitbestimmend sein für die Entwicklung des Bestandes, unter dem Aspekt der Kapitalentwicklung (und mithin der Ruinwahrscheinlichkeit).

2.1.1 Befindet sich eine Person in Ruhe bezüglich des sie umgebenden Versicherungsraums (d.h., bleibt ihr Zustand konstant), so gibt es doch sicher einen Anteil der Eigenaktion, der gewissermaßen eine Ruheenergie der Person darstellt. Für diesen nie verschwindenden Energieanteil (fast nie verschwindend, vgl. vorn) wollen wir ein Maß m auf I einführen. Wir schreiben dann

$$E = \frac{1}{2} g^{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = m + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \ ,$$

wobei in $g^{ik}$ einfach der zeitliche Term abseparíert wurde (nämlich der, der positionsunabhängig ist). Gehen wir wie in 1.3.2 zur Dichtedarstellung unserer Größen über, können wir schreiben

$$m = \int \varrho_m \, d\Omega \ ,$$

wobei $\Omega$ ein Volumen von I bedeutet (d.h. über eine Untermannigfaltigkeit genommen unter Beachtung der Lokalität).

Bemerkung: Für die Lebensversicherung folgt hierbei der Fall der Toten, die durch Aktionen mit verschwindender Energie wegen m = 0 gekennzeichnet sind. Man beachte dabei, daß Personen, die sich im idealsten Falle mit der Maximalgeschwindigkeit 1 über I bewegen, ebenfalls Ruheenergie Null besitzen, jedoch sind die $\dot{x}$ stets konstant ungleich Null. Im hier angesprochenen Fall verschwindet aber auch $\dot{x}$, denn x =const. (auf dem zeitlichen Rand).

2.1.2 Im Falle von Wechselwirkungen wird sich die Gesamtenergie einer Person ergeben wie

$$E_{ges} = H + E_{int} \quad ,$$

wobei V Wechselwirkungen externer Natur (aus dem Komplement von I) oder Korrekturen im Sinne einer Strategie der Gesellschaft behandelt und noch ausgeklammert bleiben soll. Es bedeutet $E_{int}$ den interaktiven Energieanteil.

2.1.3 Wir benötigen noch ein Maß für den Eigenanteil einer Person bezüglich Wechselwirkungen. Wir wollen es mit Q bezeichnen, mit Dichte $\rho_q$ . Es ergibt sich eine elegante Interpretation: Der Ausdruck

$$s^i = \rho_q \, u^i$$

heißt Flußdichte des Feldes. In der Tat gibt es eine Kraftliniendarstellung des Feldes, repräsentiert durch Stromlinien, deren Dichte gerade durch $s^i$ angegeben wird. Es sind $\rho_w$ und $\rho_q$ echte Quellen des Prozesses (man verfolge die Argumentation zurück und beachte, daß $\rho_w = \rho_q = 0$ den Trivialfall impliziert, also den flachen Raum).

2.1.4 Bevor wir unseren Feldbegriff näher diskutieren, machen wir zur Vereinfachung noch einige Einschränkungen. Zunächst lassen wir Maxwell's Prinzip auf I zu, das grob formuliert die Existenz von Kräften garantiert, die in geeigneter Darstellung (nämlich in Potentialform) einer Hälfte der homogenen Maxwell-Gleichungen gehorchen. Diese Terme wollen wir mit S und O bezeichnen und nennen sie subjektiven bzw. objektiven Feldanteil. Ersterer regelt dabei den subjektiven Entscheidungsbereich einer Person, während der letztere objektive Umwelteinflüsse berücksichtigt. Wir wollen noch einen Schritt weitergehen und annehmen, daß die Beeinflussung einer Person durch eine andere (also einseitig) durch einen Wechselwirkungsanteil dargestellt werden kann,

der sich auf einen einfachen Gradienten reduziert, von der Art $\Box^n V$, wobei V ein geeignetes Skalarpotential bedeutet. Es ist nur Zufall, daß man solche Felder konservativ nennt.

2.1.5 Tritt zu diesem reduzierten subjektiven Anteil noch O hinzu, so haben wir eine beidseitige Wechselwirkung (durch die Beimengung objektiver Elemente) und die gesamte Darstellung ist nicht mehr konservativ. In diesem Sinne nun wollen wir formulieren:

Axiom 6: Es gelten Maxwell's Gleichungen lokal auf I.

Dies ist nur die natürliche Konsequenz unserer Vorbereitungen, denn nach dem oben Gesagten können wir eine Potentialdarstellung für S und O angeben, so daß

$$S := -\Box^m V - p_{,t} \quad , \quad O := \Box^m \times p \quad .$$

Wir wollen S und O Feldstärken für den subjektiven bzw. objektiven Feldanteil nennen. Hierbei ist V ein Skalarpotential und p ein n-Vektorpotential+), die man beide bequem in einem Potential

$$p^k := (p \ , \ V)$$

zusammenfassen kann. Wir fordern auch für den oben eingeführten Strom eine Kontinuitätsgleichung nach dem in 1.4.11 Beschriebenen: Wir haben nur ein geeignetes Moment zu bestimmen, das uns nach dem Noether-Theorem die Erhaltung liefert. Es soll mithin gelten

$$s^i{}_{;i} = 0 \quad .$$

Man beachte, daß offenbar $s := (j \ , \ \varrho)$ ist, wobei j den n-1-dimensionalen Strom bedeutet.

---

+) Man kann zeigen, daß ein n-Potential in Wirklichkeit nichts weiter ist als ein spezieller Zusammenhang in einer für die Wechselwirkungen natürlichen Geometrie [20,23] .

2.1.6 Nach allen diesen gemachten Voraussetzungen gibt es einen (kovarianten) Feldtensor $F_{ik}$, der die gesamten Wechselwirkungen beschreibt und aus einer Tensorrotation gebildet werden kann

$$F_{ik} := p_{i;k} - p_{k;i} \quad .$$

Man beachte dabei stets, daß die kovariante Ableitung (;) nur im Trivialfall des flachen Raumes durch die partielle (,) ersetzt werden kann!

2.1.7 Nach Axiom 6 genügt der Tensor den Beziehungen

$$F^{ik}{}_{;k} = s^i \quad , \quad {}^*F^{ik}{}_{;k} = 0,$$

wobei ${}^*F$ den zu F dualen Tensor bedeutet. Zusammen mit dem Erhaltungssatz $s^i{}_{;i} = 0$ bilden diese Beziehungen Maxwell's Gleichungen.

2.1.8 Wir finden nun straight-forward einen Energie-Impuls-Tensor $T^{ik}$ [23] , von der folgenden Form:

$$T^{ik} = F^i{}_j F^{jk} + \frac{1}{4} g^{ik} F^{jn} F_{jn} \quad .$$

Bestimmen wir aus der 0-Komponente den Hamiltonian, so bekommen wir

$$H = \frac{1}{2} ( \underline{s}^2 + \underline{o}^2)$$

für die gesamte Energiedichte des Feldes.

Setzen wir diesen Energie-Impuls-Tensor jetzt in die rechte Seite der Feldgleichungen 1.2.4, so bekommen wir die Geometrie in der Umgebung einer Person, die Wechselwirkungsenergie trägt. Diesen Fall wollen wir näher untersuchen.

## 2.2 Eine vereinigte Theorie

Die folgenden Rechnungen sind in ausführlicher Form dargestellt, um zu zeigen, mit welchen relativ einfachen Mitteln (Grundlagen aus der Matrizentheorie) Aussagen gemacht werden können über die Bedeutung der Wechselwirkungsanteile von Personen bezüglich der sie umgebenden Geometrie auf I. Wir wenden dabei eine elegante Methode von Rainich, Misner und Wheeler an [10,25,23] und werden zu einer wichtigen Interpretation gelangen. Vorerst seien noch einige Grundlagen über Matrizen vorangestellt.

2.2.1 Theorem: (Cayley-Hamilton) Sei $F = \{ f_{ik} \}$ eine beliebige nxn-Matrix und $\phi(F)$ ihr charakteristisches Polynom. Dann erfüllt F ihre eigene charakteristische Gleichung $\phi(F) = 0$. Insbesondere erfüllt jede nxn-Matrix eine algebraische Gleichung der Ordnung n.

2.2.2 Werde der Feldtensor der Wechselwirkungen auf I gerade durch eine solche nxn-Matrix repräsentiert, so daß $F^T = -F$ (das entspricht der Antisymmetrie des Feldtensors, vgl. seine Einführung im vorigen Abschnitt). Sei $\phi$ vom Grad n in der Entwicklungsvariablen $\lambda$, dann gilt $\phi(-\lambda) = (-1)^n \phi(\lambda)$, und das charakteristische Polynom ist gerade eine Funktion in $\lambda$. Mit 2.2.1 gibt es dann eine Entwicklung der Form

$$F^n + a_{n-2} F^{n-2} + \ldots + a_0 I = 0 \quad .$$

2.2.3 Ist $\lambda$ eine Wurzel von $\phi$, so ist dies auch $-\lambda$. Deshalb treten die Eigenwerte einer nxn-Matrix, die antisymmetrisch ist, in Paaren $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$ auf. Wir können dann eine Zerlegung für $\phi$ angeben, der Art

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_m)(\lambda + \lambda_m)$$

$$= \lambda^m - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2)\lambda^{m-2} + \ldots$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir sofort

$$F^n - (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2)\, F^{n-2} + \ldots + \lambda_1^2 \ldots \lambda_n^2 I = 0 .$$

2.2.4 Wir nehmen jetzt noch eine Vereinfachung vor. Aus Gründen der Übersicht sei F als spezielle 4x4-Matrix angenommen. Für den Augenblick schränken wir uns also auf den Fall dreier Versicherungstypen auf I ein. Dies verfälscht keineswegs unser Modell, alle künftig gemachten Aussagen bleiben auch für ein I mit n Dimensionen erhalten, die Allgemeinheit wird nicht eingeschränkt. Allerdings werden die Terme innerhalb der folgenden Entwicklung wesentlich vereinfacht.

2.2.5 Mit ihm wird die letzte Beziehung zu

$$F^4 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\, F^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 I = 0 .$$

Definieren wir $\Gamma^2 := \frac{1}{4} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 I$, so gilt $F^2 + \frac{1}{2} a_2 I = \Gamma$, wobei $a_2$ einen Entwicklungskoeffizienten bedeutet, und sei künftig $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$ gewählt.

2.2.6 Satz: (Jordan) Jede komplexe Matrix kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine Matrix der Form

$$\Pi = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_N \end{bmatrix} ,$$

überführt werden, wobei die $C_i$ gegeben sind durch

$$C_i = \begin{bmatrix} \tau_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \tau_i & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \tau_i \end{bmatrix} .$$

2.2.7 Dies gilt auch für $\Gamma$ ,deshalb folgt

$$\Gamma = Q^{-1} ( \dots ) Q$$

und auch

$$\Gamma^2 = Q^{-1} ( \dots )^2 Q = \frac{1}{4} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \, I \quad .$$

Dann können wir speziell die $C_i$ schreiben als

$$C_i^2 = \begin{bmatrix} \tau_i^2 & 2\tau_i & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \tau_i^2 & 2\tau_i & 1 & 0 \dots & 0 \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \dots & \tau_i^2 \end{bmatrix} \quad .$$

Das kann nur dann der Fall sein,wenn $C_i$ eine 1x1-Matrix ist und die $\tau_i$ gerade durch $\pm \frac{1}{2} ( \lambda_1^2 - \lambda_2^2 )$ gegeben sind. So haben wir schließlich

$$\Gamma = Q^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau_N \end{bmatrix} Q \quad ,$$

wobei die Klammer die Eigenwerte von $\Gamma$ angibt. Man nennt diese Darstellung die kanonische Jordan Form.

2.2.8 Ist $\Lambda$ Eigenwert von $F^2$,entweder $\lambda_1^2$ oder $\lambda_2^2$ ,so bekommen wir

$$| \tau_i I - \Gamma | = | \Lambda I - F^2 |$$

und somit $\tau_1 = \tau_2 = -\tau_3 = -\tau_4 = \tau = \frac{1}{2} ( \lambda_1^2 - \lambda_2^2 )$ und

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 ) Q^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} Q \quad .$$

Da die Spur von $\Gamma$ invariant ist unter Ähnlichkeitstransformation,so gilt tr $\Gamma$ = 0. Entsprechend haben wir

$$\Gamma = F^2 - \frac{1}{4} (\operatorname{tr} F^2) I \quad .$$

2.2.9 Satz: Ist eine symmetrische Matrix $\Gamma$ mit Eigenwerten $\pm\tau$ ähnlich zu einer diagonalen $\Pi$ der Form

$$\Gamma = Q^{-1} \Pi Q = Q^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} Q ,$$

dann gibt es einige Q, die orthogonal sind.

2.2.10 Schreiben wir F nun in der Form

$$F = Q^T \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} Q,$$

wobei die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 2x2-Matrizen bedeuten, dann folgt

$$F^2 = Q^T \begin{bmatrix} \lambda_1^2 I & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 I \end{bmatrix} Q ,$$

und wegen $F^2F = FF^2$ gilt

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2\alpha & \lambda_1^2\beta \\ \lambda_2^2\gamma & \lambda_2^2\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2\alpha & \lambda_2^2\beta \\ \lambda_1^2\gamma & \lambda_2^2\delta \end{bmatrix} ,$$

so daß mit $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$ die Matrizen $\beta$ und $\gamma$ verschwinden. Ebenso gibt $FF = F^2$, daß $\alpha = \pm i \lambda_1 J$, $\delta = \pm i \lambda_2 J$, mit

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

2.2.11 Die Vorzeichen können beliebig gewählt werden, denn die Eigenwerte von F treten paarweise auf. Wählen wir sie also positiv, dann können wir noch schreiben

$$F = Q^T \begin{bmatrix} i\lambda_1 J & 0 \\ 0 & i\lambda_2 J \end{bmatrix} Q \quad .$$

2.2.12 Wir nehmen jetzt noch einige Definitionen vor, die die weitere Entwicklung erleichtern werden. Es seien

$$p := i Q^T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \ ,$$

$$q := i Q^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} Q$$

mit $J^2 = -I$. Dann hat man

$$p^2 + q^2 = I \ , \ p^3 = p \ , \ q^3 = q \ ,$$

$$p.q = 0 \ , \ p^4 + q^4 = I$$

und F wird einfach zu

$$F = \lambda_1 p + \lambda_2 q \quad .$$

Hieraus ergeben sich ebenso

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(p^2 - q^2) \ ,$$

$$\Gamma^2 = \frac{1}{4} (\mathrm{tr}\ \Gamma^2)\ I \quad .$$

Führen wir eine neue Transformation ein, der Art

$$\bar{\lambda}_1 = \mathrm{ch}\ \{ \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad ,$$

$$\bar{\lambda}_2 = \mathrm{sh}\ \{ \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad ,$$

wobei $\zeta_1$ ein beliebiger reeller Parameter ist, so erhalten wir noch

$$\bar{F} = \bar{\lambda}_1 p + \bar{\lambda}_2 q \ , \quad \bar{\Gamma} = \Gamma$$

und auch $\bar{F} = F$. Das heißt, eine ganze einparametrige Familie von F-Matrizen ruft eine gleiche $\Gamma$-Matrix hervor.

2.2.13 Wir wählen jetzt innerhalb unserer Geometrie ein lokal geodätisches Koordinatensystem und berücksichtigen die Feldgleichungen in Matrixform

$$R = 8\pi T \ ,$$

wobei zu beachten ist, daß die linke Seite spurfrei wird wegen 2.1.8 (denn diese Definition macht $T^{ik}$ spurfrei). Identifizieren wir T mit $\Gamma$ und beachten in der Folge tr R = 0, so führen die Ergebnisse der vorigen Seite zu der Beziehung

$$R_{ik} R^k{}_m = \frac{1}{4} ( R_{jn} R^{jn}) g_{im} \ ,$$

wobei wir der Anschaulichkeit halber wieder auf Tensorschreibweise zurückgegriffen haben. Diese Form liefert die Integrabilität des Ricci-Tensors und wurde von Rainich gefunden [10].

2.2.14 Wir benötigen noch zwei Lemmata:

Lemma 1: Ist $F_{ik}$ reell in einem reellen Koordinatensystem, so ist $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2$ eine positive reelle Zahl. Hieraus folgt sofort, daß $\Gamma^{i\kappa}\Gamma_{i\kappa} \geq 0$, und somit gilt die gleiche Tatsache für $R^{ik}R_{ik}$.

Lemma 2: $\quad T_{oo} \geq 0 \iff R_{oo} \geq 0$
ist eine kovariante und konsistente Aussage.

Die Beweise laufen über recht einfache Argumente und sind hier ausgelassen. Es sei aber bemerkt, daß Lemma 2 sowohl Positivität der Energie als auch kausale Kon-

sistenz bezüglich der geometrischen Krümmung liefert.

2.2.15 Es soll nun F zusätzlich die Maxwell-Gleichungen erfüllen (das steckt bisher noch nicht in der Entwicklung!). Ist dann $\xi$ eine Parameterfunktion, koordinatenabhängig, so kann man F in der Form

$$F_{ik} = p_{ik} \, ( r \operatorname{ch} \xi ) + q_{ik} \, ( r \operatorname{sh} \xi ) ,$$

$$\bar{F}_{ik} = q_{ik} \, ( r \operatorname{ch} \xi ) + p_{ik} \, ( r \operatorname{sh} \xi )$$

schreiben mit $r := \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$ .

Aufgrund unseres speziellen Koordinatensystems können wir o.B.d.A. annehmen, es gäbe einen Punkt, an dem gerade $Q = I$ und $p = \bar{p}$ sowie $q = \bar{q}$. Dann gilt mit vorigen Ergebnissen

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} r^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

und für die Maxwell-Gleichungen

$$p_{ik} A_{,k} + q_{ik} B_{,k} + A C_i + B D_i = 0$$

$$q_{ik} A_{,k} + p_{ik} B_{,k} + A D_i + B C_i = 0 ,$$

wobei $p_{ik,k} := C_i$ und $q_{ik,k} := D_i$ sowie $r \operatorname{ch} \xi := A$ und $r \operatorname{sh} \xi := B$.

2.2.16 Nach einigen Umformungen gelangen wir zu

$$A \, ( p_{ik} C_k + q_{ik} D_k + (\ln r)_{,i} ) +$$

$$B \, ( q_{ik} C_k + p_{ik} D_k + \xi_{,i} ) = 0$$

und der hierzu dualen Beziehung. Beide Gleichungen haben bekanntlich nur dann eine nichtverschwindende Lösung, falls der Wrońskian verschwindet, d.h. $A^2 - B^2 = 0$.

Da aber $A^2 - B^2 = \lambda_1^2 - \lambda_1^2 \neq 0$, gibt es nur die triviale Lösung. Daraus folgt sogleich

$$\{\,,i = -\,(\,q_{ik}\,C_k + p_{ik}\,D_k\,)\,,$$

$$(\ln r)_{,i} = -\,(\,p_{ik}\,C_k + q_{ik}\,D_k\,)\,.$$

2.2.17 Es folgt jetzt eine etwas längliche Ableitung, in der die Terme auf der linken Seite näher untersucht werden, doch wollen wir diese hier nicht ausführlich angeben. Die Idee ist, von infinitesimalen Rotationen der Metrik ausgehend und einer zugehörigen orthogonalen Matrix Q, eine Entwicklung in Q nach aufsteigenden Potenzen eines vorgewählten $\varepsilon$ vorzunehmen und durch Einführung einer formalen Ableitung für p (durch Quotientenvergleich zweier Entwicklungen für Q und C, anschließenee Quotientenbildung und Grenzübergang) zur folgenden Darstellung zu gelangen:

$$p_{,i} = i \begin{bmatrix} 0 & J\alpha^* \\ -\beta^* J & 0 \end{bmatrix},$$

$$q_{,i} = i \begin{bmatrix} 0 & -J\alpha^* \\ \beta^* J & 0 \end{bmatrix}.$$

Wegen der bekannten Beziehungen für $\Gamma$ folgt

$$\Gamma_{,i} = (\ln r)_{,i}\, r^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + r^2 \begin{bmatrix} 0 & \alpha^* \\ -\beta^* & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $\alpha^*, \beta^*$ Komponenten von C bedeuten. Zerlegt man letztere weiter in der Form

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* \\ \alpha_3^* & \alpha_4^* \end{bmatrix}, \quad \beta^* = \begin{bmatrix} \beta_1^* & \beta_2^* \\ \beta_3^* & \beta_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_4^* & \alpha_3^* \\ \alpha_2^* & \alpha_1^* \end{bmatrix},$$

so finden wir

$$P_{,i} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3^* & \alpha_4^* \\ & -\alpha_1^* & -\alpha_2^* \\ -\alpha_3^* & \alpha_1^* & \\ -\alpha_4^* & \alpha_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_{,i} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2^* & -\alpha_1^* \\ & \alpha_4^* & -\alpha_3^* \\ -\alpha_2^* & -\alpha_4^* & \\ \alpha_1^* & \alpha_3^* & 0 \end{bmatrix}$$

und noch

$$\Gamma = (\ln r)_{,i}\, r^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + r^2 \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1^* & \alpha_2^* \\ & \alpha_3^* & \alpha_4^* \\ \alpha_1^* & \alpha_3^* & \\ \alpha_2^* & \alpha_4^* & 0 \end{bmatrix} .$$

2.2.18 Schließlich gelangen wir auch zu expliciten Ausdrücken für $C_1, D_i$ und $\zeta_{ii}$, deren aktuelle Form uns nicht weiter beschäftigen soll. Auf der Grundlage dieser etwas komplexen Argumentation jedoch findet man jetzt die folgende Interpretation, die gewissermaßen im Rückschluß alle Überlegungen im Nachhinein motiviert.

Sei ein Vektor konstruiert der Form

$$v_k = \frac{(-g)^{1/2}\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, \Gamma^{\beta 1;\mu}\, \Gamma_e^{\alpha}}{\Gamma_{\nu s}\ \Gamma^{\gamma s}} ,$$

wobei $\bar{\Gamma}_{\nu s}\ \bar{\Gamma}^{\gamma s} = \mathrm{tr}\ \Gamma^2 = r^4$ gilt (deshalb ist der Nenner aus Bequemlichkeit vorgewählt). Ebenso ergibt sich

$$(-g)^{1/2}\ \varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,\Gamma^{\beta l;\alpha}\,\Gamma^{\ \alpha}_{l} = \varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,\Gamma_{\beta l;\alpha}\,\bar{\Gamma}_{\kappa\gamma}$$

$$= \varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,\Gamma_{\beta l;\alpha}\,\bar{\Gamma}_{\kappa\gamma}$$

$$= \varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,(2\,\Gamma_{\alpha l}(\ln r)_{,k} + r^2\begin{bmatrix} 0 & \alpha^* \\ -\beta^* & 0 \end{bmatrix}\bar{\Gamma}_{k\gamma})\ .$$

Da wir bereits wissen, daß $\bar{\Gamma}_{rs}\bar{\Gamma}^{rs}$ ein Multiple der Einheitsmatrix ist, verschwindet der erste Term und wir haben übrig

$$(-g)^{1/2}\,\varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,\Gamma^{\beta l;\alpha}\,\Gamma^{\ \alpha}_{l} = \varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,r^2\begin{bmatrix} 0 & \alpha^* \\ -\beta^* & 0 \end{bmatrix}\bar{\Gamma}_{k\gamma}.$$

Mit früheren Ergebnissen und einiger Rechnung folgt in expliciter Darstellung

$$\Gamma^{\beta l;\alpha}\,\Gamma^{\ \alpha}_{l} = \frac{1}{2}\,r^4\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1^* & -\alpha_2^* & -\alpha_3^* \\ \alpha_1^* & 0 & -\alpha_3^* & -\alpha_4^* \\ \alpha_2^* & \alpha_3^* & 0 & \\ \alpha_4^* & & & \end{bmatrix}$$

sowie auch

$$v_k = \begin{bmatrix} \alpha_{43}^* - \alpha_{34}^* \\ \alpha_{14}^* - \alpha_{23}^* \\ \alpha_{22}^* - \alpha_{41}^* \\ \alpha_{31}^* - \alpha_{12}^* \end{bmatrix}\ .$$

Es ist jetzt leicht zu zeigen, daß auch gerade $\xi_{i\kappa}$ diese letzte Form annimmt, so erhält man schließlich, wobei $\Gamma$ durch R ersetzt wird:

$$v_k = \frac{(-g)^{1/2}\,\varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\ R^{\beta l;\alpha}\ R^{\ \alpha}_{l}}{R_{rs}\ R^{rs}}$$

mit der Integrabilitätsbedingung $v_{i,k} - v_{k,i} = 0$.

2.2.19 Wir wollen noch einmal die Ergebnisse dieses Kapitels zusammenfassen:

(Rainich-Misner-Wheeler)

(1) $R_{ik} R^{k}{}_{m} = \frac{1}{4} ( R_{sn} R^{sn} ) g_{im}$ ,

(2) $tr R = 0$ , $R_{oo} \gtrless 0$ ,

und

(3) $v_{i,k} - v_{k,i} = 0$ mit

$$v_k = \frac{(-g)^{1/2} \varepsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma} R^{\beta\ell;\alpha} R^{\alpha}{}_{\ell}}{R_{rs} R^{rs}}$$

2.2.20 (Interpretation) Das System von Gleichungen in 2.2.19 bestimmt den allgemeinsten Krümmungstensor der Riemannschen Geometrie, der sowohl den Einsteinschen Gleichungen in spurfreier Form genügt als auch den Maxwell-Gleichungen. Zunächst bemerkt man in der Tat, daß alle Beziehungen für den n-dimensionalen Fall gültig sind.

Die Bedingungen (2) des Systems sind lediglich Kompatibilitätsbedingungen, aber trotzdem sehr wesentlich für die Interpretation, denn sie gewährleisten die Positiv-Definitheit der Energie und die kausale Konsistenz. Mit der Rückverfolgung unserer gesamten Entwicklung gelangt man vom System 2.2.19 zu den Feldgleichungen von Einstein und Maxwell.

Schränken wir uns vorübergehend noch einmal auf den Fall von vier Dimensionen ein und wählen wir radialsymmetrische Koordinaten, so bekommen wir als Lösung des vereinigten Systems von Feldgleichungen gerade eine Metrik der Form

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right)} -$$

$$- r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2 \right) ,$$

wobei m und Q die vorgewählten Aktionsmaße bedeuten. Dies ist die Form einer Reissner-Nordström-Lösung [25] .

Bemerkung: Man sollte hieraus nicht den Schluß ziehen, daß sich also Personen in Wechselwirkung wie Teilchen mit Ladung auf der Raum-Zeit verhalten. Denn zunächst einmal sind m und Q noch nicht spezifiziert (und es bedarf wohl einiger weiterer Arbeit, dies zu tun) und ferner sind die metrischen Koeffizeinten $g_{ik}$ stochastisch, wie bereits erwähnt. Zudem ist es keineswegs empirisch gerechtfertigt, die Abhängigkeit der $g_{ik}$ nur als radial anzusetzen, jedoch dient dies hier der Anschaulichkeit.

Verbleiben wir etwas bei dieser Metrik, so sehen wir, daß die Metrik keine formale Singularität hat (Horizont, vgl. (3)), falls

$$m < \sqrt{4\pi} \, Q \quad .$$

Es gibt nur eine substantielle Singularität bei r = 0, an der Stelle, an der sich die Person als Punktsingularutät befindet.

Tritt also der Fall $m > \sqrt{4\pi} \, Q$ ein, so ist die Eigenaktion größer als die herangetragene (Wechselwirkungs-) Aktion. Aus geometrischer Sicht bedeutet das für einen Beobachter (insbesondere die Person, die beeinflussen will), daß es einen Horizont gibt. Das heißt, es lassen sich keine Aussagen machen über die Effekte der versuchten Beeinflussung (ein Fall, der im Rahmen des Wettbewerbs (Werbepsychologie, vgl. vorn) öfter eintreten wird).

Der zuletzt diskutierte Effekt entspringt natürlich der speziellen Geometrie,die wir gewählt haben. Schon bei Erhöhung der Dimensionen wird dieser Fall wesentlich kompliziert. Jedoch können wir unabhängig eine allgemeine Aussage machen,die ein wesentlich wichtigeres Ergebnis dieses Kapitels darstellt.

Man kann nämlich die Beziehung (3) aus 2.2.19 mit voller Berechtigung von rechts nach links lesen. Dann besagt sie,daß $v_k$ (und damit der Feldtensor der Wechselwirkungen) lediglich als mathematisches Hilfskonstrukt anzusehen ist,ohne jegliche eigene Bedeutung (außer eben der geometrischen).

Ähnlich,wie man zum Beispiel die Poisson-Gleichung der klassischen Potentialtheorie über eine Hilfsfunktion lösen kann,die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung erfüllt,ohne,daß diese Hilfsfunktion substantielle eigene Bedeutung hätte,so dient auch $v_k$ zusammen mit den Integrabilitätsbedingungen lediglich der Reduktion des (komplizierten) Systems 2.2.1 auf das (relativ einfache) der Einstein-Maxwell Gleichungen (2.1.4 und 2.1.7).

Konsequent interpretiert heißt das: Die Wechselwirkungen zwischen Personen auf I sind lediglich ein spezieller Aspekt (Erregungszustand) der unterliegenden Geometrie. Sowohl die Eigenaktion als auch die Verhaltensweisen von Personen bei Wechselwirkungen sind allein durch die Geometrie der Versicherungsmannigfaltigkeit beschreibbar.[+])

---

[+]) Man sieht leicht,daß eine Metrik für n Versicherungen unter zusätzlicher Berücksichtigung teilweise konstanter Parameterfunktionen (wie juristische Spezialfälle,empirisch gefundene Präferenzen etc.) schnell zu Ausdrücken führen,die naheliegend mit numerischen Methoden bearbeitet werden sollten.

(3) Eine Katastrophentheorie des Risikos

Dieses Kapitel soll jetzt alle vorigen Überlegungen über ein Modell von Versicherungsprozessen auf Mannigfaltigkeiten mit der Risikotheorie im allgemeinen Sinne verknüpfen. Dabei wird insbesondere der Aspekt von Singularitäten aufgrund geodätischer Unvollständigkeit auf I diskutiert,der auch einen Eindruck vom "Rand" von I vermittelt. Die Katastrophentheorie nach Thom wird andiskutiert,ebenso werden einige Aspekte des Wettbewerbs behandelt,jedoch sind diese Problemkreise viel zu umfassend,als daß man sie in einer Dissertation dieser Art auch nur halbwegs erschöpfend behandeln könnte. Vielmehr müssen viele neuere Gesichtspunkte (zum Beispiel auch der der Hopf-Bifurcation nach Marsden und McCracken [20] ) auf künftige Untersuchungen vertagt werden. Erst nach ausführlicher Erforschung der Zusammenhänge mit Versicherungsprozessen unter allgemeinsten wirtschaftstheoretischen Perspektiven wird man in der Lage sein, praktisch wirksame Modelle zu initiieren,die auch zu neuen empirischen Ergebnissen führen.

3.1 Das Konzept der Ruinwahrscheinlichkeit

Wir haben bereits an verschiedenen Stellen auf den unterliegenden stochastischen Charakter der Versicherungsprozesse hingewiesen,ohne den zugehörigen stochastischen Prozeß explicit einzuführen. Wir wollen dies zunächst geeignet motivieren.

3.1.1 Sei $W := (\Omega, \mathcal{Z}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum über I mit $\Omega$ als Raum der elementaren Ereignisse, d.h. dem Raum aller möglichen Metriken $g \in \mathrm{Riem}(I)^{+})$.

---

+) Wir vollführen den Übergang,der stillschweigend hinter dieser Diskussion steht,nämlich den von der Riemannschen Metrik zur Lorentzmetrik etwas lax,doch sollte der Unterschied bereits hinreichend klar sein,so daß sich keine Mißverständnisse ergeben können.

Es bedeuten $\Sigma$ die $\sigma$-Algebra auf W,P das Wahrscheinlichkeitsmaß.

3.1.2 Wir machen das Ereignis "es gibt ein $g_{ik}$" zum stochastischen Prozeß auf die folgende Art: Zu unserem Wahrscheinlichkeitsraum W soll es eine Abbildung

$$\phi : R \times \Omega \to \mathrm{Riem}(I)$$

geben, so daß $\phi$ meßbar ist und Riem(I) separabel. Letzteres ist eine Nebenbedingung und sichert die Integration. Für das erstere muß gelten

$$\bigwedge_{O \subset \mathrm{Riem}(I)} \phi^{-1}(O) \subset \Sigma(\Omega) \quad ,$$

wobei O offene Mengen von Riem(I) in der entsprechenden Topologie bedeuten+).

3.1.3 Als $\sigma$-Algebra sei nun gewählt eine Familie von Untermengen $\mathfrak{R}$ aus Riem(I) mit den üblichen Bedingungen:

(1) $A \in \mathfrak{R}$ , $B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$ ,

(2) $A \in \mathfrak{R} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{R}$ ,

(3) $\bigcup_k A_k \in \mathfrak{R}$ ,wenn $A_k \in \mathfrak{R}$ .

Dann bezeichnet $\mathfrak{R}$ gerade die Borel-Mengen auf Riem(I).

---

+) Wir führen eine Topologie gleich für Lorentz-Metriken ein. Dann kann man ein g auffassen als Schnitt I nach Riem(I), so daß $\pi \circ g = \mathrm{id}$. Sei U offene Menge in Riem(I) und sei O(U) Menge aller differenzierbaren g's, so daß g(I) in U ist. Dann sind die offenen Mengen in der $C^0$-offenen Topologie $C^\infty$-Lorentz-Metriken auf I definiert als Vereinigung einer oder mehrerer Mengen der Form O(U).

3.1.4 Der Rest ist leicht getan: Da $\Omega$ Raum aller möglichen Metriken ist, also dieselbe Struktur hat, wie Riem(I), ist die Aufgabe, $\phi$ meßbar zu machen, trivial, wenn immer $\Sigma$ groß genug gewählt wird.

3.1.5 Deshalb macht es Sinn, von einer Verteilung der $g_{ik}$ zu sprechen mit Dichte f, so daß man als Verteilungen beispielsweise bekäme

Beispiel:

(1) (Gauss)

$$f(g_{ik}) = \frac{k}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{(g^0_{ik} - g_{ik})^2}{\sigma^2}\right\},$$

(2) (Cauchy)

$$f(g_{ik}) = \frac{k}{\sigma^2 + (g^0_{ik} - g_{ik})^2},$$

(3) (Poisson)

$$f(g_{ik}) = k \exp\left\{-(g^0_{ik} - g_{ik})\right\}\,\frac{(g^0_{ik} - g_{ik})^s}{s!}.$$

Hierbei haben wir in etwas nachlässiger Schreibweise, die aber praktisch ist, die Komponenten $g_{ik}$ einfach geschlossen in die Beziehung gesetzt. Natürlich entsprechen diese stets n Beziehungen, falls $g_{ik}$ orthogonal ist.

3.1.6 Der Weg, der weiter einzuschlagen ist, folgt sofort: Man beginnt mit bekannten $g^0_{ik}$ zu einem Zeitpunkt des Eintritts $t_0$ und berechnet sich die künftigen $g_{ik}$ für alle $t > t_0$. Dabei ist darauf zu achten, daß die $g_{ik}$ koordinatenabhängig sind, wobei eine bestimmte Kombination von Koordinaten stets eine bestimmte Konstellation des Kapitals bedeutet, mittelbar durch die zugehörige Festlegung von Versicherungssummen.

Über das Kapital haben wir noch nicht gesprochen, es soll jetzt betrachtet werden.

3.1.7 Die bekannte Kapitalfunktion muß jetzt dahingehend verallgemeinert werden, als sie von allen n Koordinaten abhängt, statt nur vom Anfangskapital und der Zeit. Wir führen dazu eine Vorschrift ein, die eine Zuordnung bewirkt, so daß

$$(x^i) \quad \Leftrightarrow \quad K(x^i) \text{ (skalar)}$$

gilt. Das heißt, jedem Punkt auf I wird in eindeutiger Weise ein Kapital zugeordnet, das aus den Konditionen (empirisch) folgt, durch die der Punkt über die Versicherungssummen, die er darstellt, charakterisiert wird. Für eine ganze Geometrie mithin bekommt man zwischen den $g_{ik}$ und K ebenso eine Zuordnung, denn jeder Punkt einer Kurve, die sich über die $g_{ik}$ (vgl. Geodätische) bestimmt, korrespondiert selbst zu einem bestimmten Kapital. Es muß also auch gelten

$$g_{ik}(x^i) \quad \Leftrightarrow \quad K(x^i) \ .$$

Wir bezeichnen deshalb als Kapitalfunktion auf I eine Abbildung

$$K : I \longrightarrow R \ ,$$

so daß mittels der oben erwähnten Korrespondenz+)

$$I \ni x^i \longmapsto K(x^i) \in R \ .$$

3.1.8 Wir wollen noch kurz einige Standartbeziehungen über die Rolle des Kapitals bei der Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit betrachten. Wir folgen hierbei im wesentlichen Wolff [28-30] und Philipson [42,55,62,66] .

---

+) die natürlich beliebig ist und größtenteils der Entscheidung der jeweiligen Gesellschaft unterliegt.

3.1.9 Zunächst ist das Deckungskapital für eine Versicherung gewöhnlich eine Funktion der Prämie, der Ausscheideordnung etc. Die Eindeutigkeit für verschiedene Ausscheideordnungen gewährleistet das Theorem von Cantelli [28] . Sind ${}_tV_x$ und $a_t^{(i)}$ das Deckungskapital bezüglich Ausscheidens eines x-Jährigen zum Zeitpunkt t bzw. das fällige Kapital zur Zeit t aus i-ter Ursache, so beschreibt gerade

$$\sum_i (a_t^{(i)} - {}_tV_x)\, \mu_{x+t}^{(i)}\, dt + o(dt)$$

den Erwartungswert des Betrages, der beim Ausscheiden innerhalb von $(t, t + dt)$ neben dem vorhandenen Deckungskapital aufgebracht werden muß um $a_t^{(i)}$ abzudecken+). Der Beweis ergibt sich einfach durch Anwendung der Thieleschen Differentialgleichung [28] , der das Deckungskapital genügt. Freiwillige Austritte können in dieser Darstellung mitberücksichtigt werden.

3.1.10 Zur Vereinheitlichung von kontinuierlicher und diskreter Darstellung bedarf es eines verallgemeinerten Integralbegriffes (Stieltjes-Schärf), auf den wir jedoch nicht näher eingehen wollen++).

---

+) Die Nomenklatur entstammt hier dem Bereich der Lebensversicherung, doch kann man die Begriffe o.B.d.A. auch auf andere Bereiche übertragen (insbesondere den Ausscheidebegriff auf beliebige Versicherungsgesamtheiten).

++) Wir wollen nur darin erinnern: Eine Funktion heißt von beschränkter Schwankung, falls für eine ausgezeichnete Zerlegung $\{Z_n\}$ gilt $\sup s(F \mid Z_n) \leq M = |E\ (F \mid a,b) < \infty$ mit $s(F \mid Z_n) := \sum_i |F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)|$, wenn immer $F(a)$ existiert. Eine Versicherungsfunktion im allgemeinen Sinne ist dann eine Funktion beschränkter Schwankung, die nur endlich viele Sprungstellen erster Ordnung besitzt. Dieses Konzept läßt sich auch auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern [107] .

3.1.11 Eine allgemeine Risikoversicherung im klassischen Sinne ist mit dem Zufallsereignis des Versicherungsfalles verbunden (d.h. mit irgendeiner Zahlung). Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Zahlung in (t,t+dt) fällt, gegeben durch die Verteilung

$$F(t+\varepsilon) - F(t) + o(\varepsilon)$$

mit

$$G(v,t) = P\,(v(t) \leq v_m),$$

wobei v der Barwert der Zahlung (zur Zeit t) ist und $v_m$ der Maximalwert. Es gibt dann zwei Funktionen F(t) und G(v,t) mit $F(0) = 0, F(T) < \infty$ und F(t) mon $\uparrow$, G(v,t) von beschränkter Schwankung und

$$\mathbb{E}\,(v(t)) = \bar{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v \, dG(v,t) \,,$$

$$p_v = \int_0^{+T} \bar{v}(t)\, dF(t) \,, \quad \forall\, t \in (0,T), \geq 0 \,.$$

3.1.12 Sei nun U der Barwert des Überschusses der Einnahmen über die Ausgaben

$$U = \sum_i \mu \,,$$

und sei S der Sicherheitsfond einer Gesellschaft bezogen auf den Versicherungsbestand. Dann muß gelten

$$U + S \geq 0 \,,$$

wobei U als normalverteilt angesehen werden kann, falls der Versicherungsbestand hinreichend groß ist, die Prozesse von gleicher Ordnung sind und unabhängig [84]. Man kann das Gesetz der großen Zahlen dann anwenden [85], und mit einer Abschätzung von Tchebychev [87] folgt die Beziehung

$$P(U < -S) \leq \frac{M^2}{(Z(1-\beta) + S)^2} ,$$

wobei $M^2$ das mittlere Risiko $\sigma^2(U) = E(U^2)$ bedeutet und $Z(1-\beta)$ den Barwert der Summe der Sicherheitszuschläge. Mit der Normalverteilung folgt sogleich

$$1 - \Phi\left(\frac{E(U) + S}{M}\right) .$$

Ein Versicherungsbestand heißt dann <u>stabil</u>, falls

$$S + E(U) \geq \lambda M$$

mit beliebigen positiven $\lambda$ gilt. Zur Erreichung des Stabilitätszustandes wählt man gewisse Strategien, etwa die verschiedenen Formen der Rückversicherung (Exzedenten-, Quoten-) zwecks Minimierung von M.

3.1.13 Im Gegensatz zum grundlegenden Ansatz der Risikotheorie kann durch die kollektive Risikotheorie [33,57,77] zusätzlich der Zeitpunkt eventuellen Ruins erfaßt werden. Ist $K_0$ das Angangskapital, dann kann die Ruinwahrscheinlichkeit mit dem <u>Sicherheitsindex</u> $\eta$ abgeschätzt werden:

$$R(K_0) \leq \exp(-\eta K_0) .$$

3.1.14 Als Risikoprozeß wird in der Regel ein stochastischer Prozeß (Markov) angenommen, wobei die verallgemeinerte Form der Brownschen Bewegung [ 91 ] besonders interessant ist. Bei der expliciten Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit für einen solchen Prozeß gelangt man zur rückwärtigen Diffusionsgleichung für R [28] . Mit Standartmethoden kann man diese auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen und mit einem Fourier-Integral lösen [85] .

Sind $K_0$ das Anfangskapital und f(.) der funktionelle

Term des dem Prozeß unterliegenden dynamischen Systems der Form $\dot{x} = f(x,t)$, so gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$R(K_o,t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ - \frac{2f(.)K_o}{\sigma^2} \right\} \quad x$$

$$x \int_0^{\frac{f(.)t-K_o}{\sqrt{t\sigma^2}}} e^{-y^2/2}\, dy \quad +$$

$$+ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{f(.)t+K_o}{\sqrt{t\sigma^2}}}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

mit $R(K_o,s,s) = 0$ und $\lim_{K_o \uparrow \infty} R(K_o,s,t) = 0$ (wobei s der Zeitpunkt unter Betrachtung ist und die letzten beiden Bedingungen R eindeutig machen. Es ist also R die Wahrscheinlichkeit, gegeben ein $K_o$ bei s, daß bis $t \geq s$ K(t) negativ wird [28].

3.1.15 Aus den Vorbetrachtungen dieses Kapitels folgt jetzt, daß $R = R(K_o,x^i)$ eine sinnvolle Verallgemeinerung darstellt, so daß sich statt der obigen Beziehung insgesamt n solche ergeben. Hierdurch bekommt man einen zwanglosen Anschluß an die klassische Risikotheorie unter Beachtung von 3.1.7.

## 3.2 Pathologien von Versicherungsprozessen

Im Sinne der Thomschen Katastrophentheorie bildet eine Versicherungsgesellschaft zusammen mit der Menge ihrer Versicherungsgesamtheiten ein (in der Regel nicht abgeschlossenes) System von Wirtschaftsprozessen, das gewissen Stabilitätsschwankungen unterworfen ist. Sei $\mathfrak{E}$ die abstrakte Darstellung dieses Systems und seien $s \in \mathfrak{E}$ Versicherungsprozesse.

Die Trajektorien von Personen auf I bestimmen die Versicherungsprozesse. Die Gesamtheit der instabilen Prozesse in dem Sinne, als einige Trajektorien singulär werden, bildet die Katastrophenmenge auf I. Die Wahrscheinlichkeit für das Übersteigen eines kritischen Limits (für den Umfang der Katastrophenmenge) liefert das zur Katastrophe assoziierte Risiko einer Gesellschaft. Ein System kann also grundsätzlich aus stabilen und instabilen Prozessen bestehen, wichtig ist vor allem der kritische Limit, von dem an Ruin eintritt (dieses Konzept kann man auch auf Rekonstrukte nach Ruin [32] verallgemeinern).

Die jeweiligen Singularitäten von Geodätischen folgen unmittelbar aus der Geometrie von I lokal durch eine Person bestimmt und eventuelle Wechselwirkungen. Die Katastrophenmenge bestimmt sich mithin aus dieser Geometrie, also mittelbar aus der Energie der Personen. Energie ist aber nur der geometrische Aspekt von Entscheidungen von Personen, deshalb gehen hier also psychologische Faktoren ein, die mithin einer mathematischen Formulierung zugänglich werden.

Dieses entspricht der grundlegenden Idee René Thoms, der erstmals in einer allgemeinen Theorie der Modelle Prinzipien entwarf zur Behandlung komplexer, bislang noch unformalisierter Prozesse (überwiegend im Bereich der Biologie). In der Tat sind die Aussagen einer Wirtschaftsdynamik auf Mannigfaltigkeiten und feldgeometrische (d.h. Wechselwirkungs-) Aspekte bisher

mehr qualitativer als quantitativer Natur (aufgrund ihrer Komplexität eben) und formen für sich in letzter konsequenter Interpretation eine Theorie des (Wirtschafts-) Verhaltens von Personen. Es führte im Rahmen dieser Arbeit jedoch zu weit, die grundsätzlichen erkenntnistheoretischen Elemente einer solchen Behandlungsweise auf die Philosophie der Wissenschaften "abzubilden".

Ein bescheideneres, wenngleich primär realisierbares Ziel ist ohne Zweifel der Entwurf eines Ansatzes zur Katastrophentheorie des Risikos, der hier angestrebt werden soll.

3.2.1 Sei U offen aus M und sei ein Feld (F,X) über U gegeben, das eine lokale Dynamik definiert, wobei F eine kompakte Fasermannigfaltigkeit ist, oder der Raum der internen Koordinaten (vgl. 3-7)). Es gilt insbesondere, daß für jedes $x \in U$, $X_x$ ein glattes Vektorfeld auf F ist.

3.2.2 Sei zudem die Dynamik konservativ: Es gelte

$$X(x,y) = - \nabla V(x,y)$$

für ein Potential V auf F bezüglich einer festgewählten Riemannschen Metrik. Wir haben jetzt eine ganze Feldtheorie festgelegt. Die Einschränkung auf Konservativität macht Sinn im Rahmen unserer Wechselwirkungsbetrachtungen, wobei wir hier den "einseitigen" Fall haben (vgl. (2)).

3.3.3 Das Feld (F,X) kann durch ein statisches Feld mit Faser $C^\infty(F,R)$ ersetzt werden, wobei V bei x den Wert des Feldes an dieser Stelle bedeutet.

3.2.4 Die stabilen Domainen bei $x \in U$ werden durch die strukturell stabilen Attraktoren von X definiert, d.h., bei den Minima von V[+]). Es gibt oft mehrere Minima an einem (regulären) Punkt, so daß man sich das dominante Minimum auswählen muß.

---

[+]) Stabilitätskonzepte siehe insbesondere in [12,19] .

3.2.5 (Maxwell-Konvention) Befinden sich mehrere stabile Attraktoren $c_i$ miteinander im Wettbewerb bei $x \in U$, dann wird der Attraktor mit minimalem Potential gewählt.+)

3.2.6 Es gibt nun zwei Arten von Katastrophenfällen. Es heißt $x \in U$ pathologisch, falls entweder ein absolutes Minimum erreicht wird an wenigstens zwei Punkten $c, c'$ (Konfliktpunkte) oder V instabil wird (Spaltungspunkt, vgl. Hinweis Bifurcation). Sei K die Menge der V in $C^\infty(F,R)$, die eine der beiden genannten Eigenschaften haben. Gilt gerade

$$s: U \to C^\infty(F,R) \text{ , so daß}$$

$$V(m,x) = s(x) \text{ ,}$$

so ist die Menge der Katastrophenpunkte des Feldes exakt gegeben durch $s^{-1}K$. Die Menge der Strata endlicher Kodimension in $C^\infty(F,R)$ bildet eine überall dichte Untermenge von K. Ist zusätzlich s transversal zu K, so wird $s^{-1}K$ nur Strata der Kodimension vier haben, die jedes für sich einen spezifischen Typ einer lokalen Katastrophe charakterisiert.

3.2.7 Sei V glatt in n Variablen, dann ist der Ursprung strikt isolierter Punkt von V, falls das durch die partiellen Ableitungen von V in der Algebra der Keime glatter Funktionen im Ursprung generierte Ideal eine Potenz des maximalen Ideals enthält, das der Ursprung definiert. Das heißt, jedes Monom in den Variablen von V von hinreichend hohem Grade kann als Linearkombination der Art $\text{Mon} = \sum g^i V_{,i}$ mit glatten $g_i$ geschrieben werden.

3.2.8 Lemma: Sei x singulärer Punkt von V, nicht strikt isoliert. Dann gehört das Jet unendlicher Ordnung von V in x zu einer assoziierten Menge A unendlicher Kodimension im Raum $J(n,1)$ der Funktionenjets.

Beweis: siehe Thom 5.2B [3] □ .

3.2.9 Korollar: Jede differenzierbare m-parametrige Familie von Funktionen V kann beliebig genau durch eine m-parametrige Familie von Funktionen in der $C^s$-Topologie mit strikt isolierten singulären Punkten approximiert werden.

3.2.10 Sei F n-dimensionale Mannigfaltigkeit und x singulärer Punkt von V. Dann beginnt die Taylor-Entwicklung von V bei x mit einer quadratischen Form Q vom Rang n-k, wobei k der Korang der Singularität ist. Thom führt den Korang auch alternativ über Foliationen ein [3] . Man sieht, daß die Aussage, x von V (in n Variablen) habe Korang k, bedeutet, daß die Koeffizienten einer quadratischen Form in k Variablen im quadratischen Term der Taylor-Entwicklung von V verschwinden. Hieraus ergeben sich $m = \frac{1}{2} k(k+1)$ unabhängige Bedingungen.

3.2.11 Satz: Im Raum $J^2(n,1)$ der Jets zweiter Ordnung bilden die Jets singulärer Punkte vom Korang k eine (lineare) Mannigfaltigkeit der Kodimension m im Raum singulärer Jets erster Ordnung.

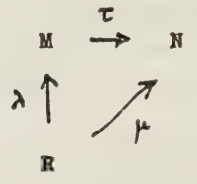
3.2.12 Korollar: Die einzigen stabilen kritischen Punkte von Familien von Funktionen, durch weniger als vier Variable parametrisiert, sind die vom Korang höchstens zwei. Man kann zeigen, daß die Singularität $V_1$ (die residuale) bis auf eine differenzierbare Äquivalenz unabhängig ist von der Wahl der Foliation [3] . Es ergibt sich dabei die wichtige Konsequenz, daß Typ und dynamischer Ursprung einer Katastrophe beschrieben werden können, selbst, wenn alle internen Systemparameter nicht explicit bekannt sind. Singularitäten führen entsprechend ihrer Auffaltung [3] zu einer Klassifizierung der Katastrophenfälle und entsprechen gewissen Elementarsingularitäten. Eine nähere Ausführung über diese Klassifizierung ist im Anhang A.2 gegeben.

3.2.13 Alle diese Vorbemerkungen, die den gesamten in 1.4 entwickelten Apparat benötigen, beziehen sich auf Singularitäten von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, in unserem Kontext also auf Transitionen.

Unter einer Transition verstehen wir dabei eine Abbildung

$$\tau : M \longrightarrow N \text{ , so daß}$$

das folgende Diagramm kommutiert, wenn immer $\lambda, \mu$ Kurven auf M bzw. N sind und M,N Untermannigfaltigkeiten (Gesamtheiten) auf I:

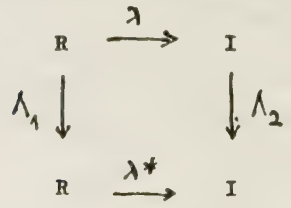



Wir betrachten dann die Menge

$$S_r(\tau) := \{ c \in J^1(M,N) \mid \text{Korang } \tau = r \}$$

in Verwendung von 1.4.38. Sie liefert uns gerade die Singularitäten der Transitionen im Sinne von Thom.

3.2.14 Stabilität läßt sich dann wie folgt definieren: Seien Trajektorien $\lambda, \lambda^*$ gegeben auf I, dann heißen $\lambda$ und $\lambda^*$ einander Äquivalent, falls es $\Lambda_1 \in \text{Diff}(R)$ und $\Lambda_2 \in \text{Diff}(I)$ gibt, so daß das Diagramm




kommutiert. Dann ist $\lambda \in C^1(R,I)$ stabil, falls es eine

Umgebung $V(\lambda) \subset C^1(R,I)$ gibt, so daß jedes $\lambda' \in V$ zu $\lambda$ äquivalent ist.

In dynamischer Formulierung kann man alternativ auch sagen, daß $\lambda \in C^1(R,I)$ stabil ist, iff $\mathrm{Orbit}(\lambda) \in C^1(R,I)$ offen ist unter $\mathrm{Diff}(R) \times \mathrm{Diff}(I)$.

3.2.15 Es wird ebenfalls eine künftige Aufgabe sein, mögliche Katastrophen im Thomschen Sinne im Versicherungsbereich nach den elementaren zu klassifizieren, dieser Problemkreis sprengt jedoch den Rahmen dieser Arbeit. In der Folge sollen deshalb die anderen Singularitäten nach dem Unvollständigkeitskozept von Kurven auf I diskutiert werden.

3.2.16 Singuläre Punkte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit werden oft von der Betrachtung ausgenommen, man kann sie "ausschneiden" [23] und sagt deshalb, eine Mannigfaltigkeit wäre singulär, wenn sie in einem zu spezifizierenden Sinne unvollständig ist. Es ist I dann singulär, wenn Geodätische auf I unvollständig sind.

3.2.17 Es heißt I metrisch(m)-vollständig, falls jede $C^1$ Kurve endlicher Länge einen Endpunkt auf I hat. Insbesondere ist I m-vollständig, falls jede Cauchy-Folge bezüglich der topologischen Metrik d an einem Punkt von I konvergiert.

3.2.18 Es heißt I geodätisch(g)-vollständig, falls jede Geodätische auf beliebige Werte ihres affinen Parameters ausgedehnt werden kann.

3.2.19 Korollar: m-Vollständigkeit $\Rightarrow$ g-Vollständigkeit.

3.2.20 Satz: (Kobayashi-Nomizu, 1963) $m \equiv g$, falls Metrik $> 0$.

3.2.21 Da eine Lorentz-Metrik nicht Metrik ist im streng topologischen Sinne, benutzt man auf I besser g-Vollständigkeit. Wir sagen, I ist singulär, falls I zumindest zeitartig oder Null-geodätisch-unvollständig ist.

Ist I zeitartig-geodätisch-unvollständig, so kann es Personen geben auf I, deren Geschichte an einem Punkt abbricht. Ausgeschlossen ist hierbei der zeitliche Rand auf I (sicher wird augenblicklich kein Versicherungsnehmer älter als 150 Jahre). Eine Singularität kann auch als kausaler Rand von I aufgefaßt werden.

3.2.22 (Singularitätstheorem) Wir geben jetzt ein Theorem an als Kriterium der Unvollständigkeit (zeitartig oder Null) nach Hawking und Penrose (1970) und diskutieren seine Bedeutung:

Theorem: Es ist I unvollständig, falls die folgenden Bedingungen zutreffen.

(1) Es gilt $R_{ik}K^iK^k \geq 0$ für alle nicht-raumartigen K,

(2) die generische Bedingung gilt,

(3) die Chronologie-Bedingung gilt,

(4) es gibt zumindest eines der folgenden,

  (a) eine kompakte achronale Menge ohne Rand,

  (b) eine abgeschlossene eingefangene Hyperfläche,

  (c) rekonvergierende Nullgeodätische bezüglich eines Punktes auf I .

Beweis: siehe [23] S.267 ff. □ .

Es folgt (1) aus der (schwachen) Energiebedingung mit den Einsteinschen Feldgleichungen und heißt Kovergenzbedingung. Sie besagt, daß jegliche Energie auf I einen konvergierenden Effekt auf Geodätische hat (vgl. Bem. über Jacobi-Felder). Der Konvergenzeffekt auf Geodätische folgt also rein aus der Präsenz von Personen auf I.

3.2.23 Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: Eine $C^2$ abgeschlossene raumartige 2-Fläche heißt eingefangen, falls die zu ihr orthogonale Familie von Nullgeodätischen bei ihr konvergiert. Läuft also eine Person auf einer Trajektorie in eine

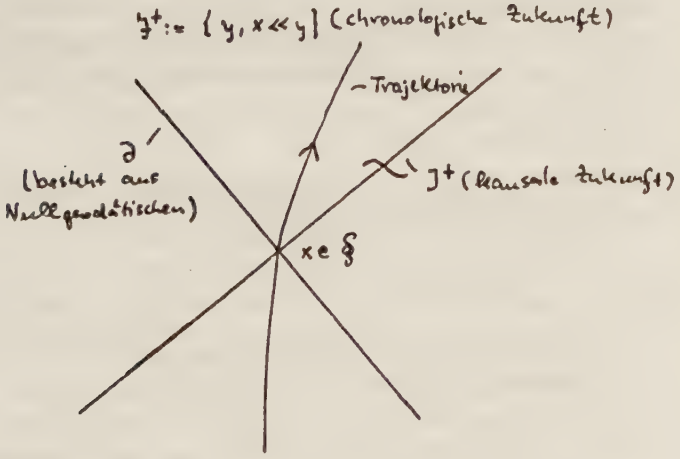
solche Fläche, so verbleibt sie dort für alle Zeiten (denn der kausale Kegel klappt am Rand der Fläche um[+]).

3.2.24 Es heißt eine (raumartige) Hyperfläche S achronal, iff keine zwei Punkte auf S chronologisch zusammenhängen. Insbesondere heißt $B \subset \dot{\sigma}$ achronaler Rand, iff es ein $S \subset I$ gibt, so daß $B = \partial J^+(S)$, wobei $J^+(S)$ die Zukunftsmenge von S bedeutet, definiert als Vereinigung der chronologischen Zukunft für alle Punkte von S.

3.2.25 Lemma: Gelten die Bedingungen (1)-(3) aus dem Theorem 3.2.22, so gilt auch die Kausalitätsbedinung (vgl. (1)).

3.2.26 Vorgänge an einer Singularität kann man sich so veranschaulichen, daß eine Person für andere auf I verschwindet, sie tritt in das kausale Komplement von I (nicht selten auch in das Komplement von I im Sinne des Konkurrenzbereichs, in der Tat sind beide identisch).

+)




$x \ll y :=$ y folgt chronologisch auf x ( Es gibt einen Trip von x nach y, d.h. eine (zukunftsgerichtete) stückweise zeitartige Geodätische.

Der Nullkegel

3.3 Wettbewerb

Bevor wir näher auf den Rand von I eingehen und dessen Ausdeutung, sollen einige kurze Bemerkungen über den Wettbewerb angefügt werden. Wir wollen uns dabei mit einigen Andeutungen begnügen.

3.3.1 Die Konkurrenzsituation zwischen zwei Versicherungsgesellschaften entspricht im spieltheoretischen Kontext einem Zwei-Personenspiel (nach Bedarf einem n-Personenspiel) mit unvollständiger Kenntnis der spielbestimmenden Elemente (insbesondere fremder Strategien). Grundsätzlich kann Spieltheorie als Nebenaspekt der Theorie der stochastischen Prozesse angesehen werden, wobei sich dieser Komplex dann auf eine Bahandlung des optimalen Stoppens reduziert [84-6, 93., 94] . Erst beim Hinzutreten gewisser Erfahrungswerte über das Verhaltens des Spielgegners lassen sich Aussagen machen, die über den rein stochastsichen Rahmen hinausgehen.

3.3.2 Im Bereich der Versicherungstheorie reduziert sich die Konkurrenz in erster Linie auf die Ausrichtung geeigneter Werbestrategien. Man nennt Strategie eine Aktion, die dem Zweck des Kundenerhalts dient. Intuitiv ist dieser Begriff klar, wir benötigen jedoch eine etwas exaktere Fassung.

3.3.3 Sei $s \in \mathfrak{E}$ ein Versicherungsprozeß. Dann ist eine lokale Strategie eine Abbildung

$$\S : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E} ,$$

so daß punktweise ein Operator wirkt auf I, der eine Erhöhung des Zustandes einer Person bewirkt. Es gibt einen Fluß $\uparrow : R \times I \to I$, so daß gilt $K(x^j) > K(x^i)$, wenn immer $x^i$ Punkt vor der Operation ist und $x^j$ Punkt nach der Operation.

3.3.4 Ist eine Strategie stets optimal, so wird eine Gesellschaft keine Gefahr laufen, in den Ruin zu geraten. Eine Strategie heißt global, falls der globalisierte Fluß, durch die lokale induziert, existiert und eine Erhöhung bewirkt.

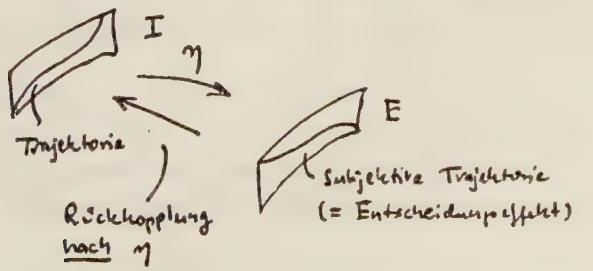
3.3.5 Wir nennen eine Strategie asymptotisch optimal, falls sie optimal ist mit $t \to \infty$ . Optimal ist eine Strategie gerade dann, wenn sie eine Erhöhung mit $P = 1$ bewirkt.

3.3.6 Ist eine Strategie asymptotisch optimal, so nennen wir sie Risikostrategie, deren Aufgabe in erster Linie ist, die Wahrscheinlichkeit des Ruins R(.) zu minimieren. Ist Pr der laufende Profit einer Gesellschaft, so heißt die Strategie, die der Oprimierung von Pr dient, Konfliktstrategie. Die unterliegende Idee ist dabei, daß verstärkter Wettbewerb auftritt, wenn nicht unmittelbar die Existenz gefährdet ist (wobei Wettbewerb rein expansiv zu verstehen ist).

3.3.7 Wir nennen nun Spieltheorie im Versicherungssinne die Gesamtheit der Konfliktstrategien auf I operierend. Ein Entscheidungsprozeß (für Gesellschaften wie für Personen!) ist ein Tripel $(\mathfrak{A}, E, \eta)$, wobei $\mathfrak{A}$ ein System von Attraktoren auf I operierend bedeutet (vgl. Wettbewerb von Potentialen im Thomschen Sinne) und E den Raum der internen Entscheidungen einer Person. Es ist $\eta$ die subjektive Filterabbildung, der Form

$$\eta : I \to E ,$$

so daß über die Geometrie von I $\eta$ an V gekoppelt ist über die Wechselwirkungsanteile (konservativer Natur, denn im Wettbewerb sind Beeinflussungen von der Intention her stets einseitig). Wir können uns einen Entscheidungsprozeß wie folgt veranschaulichen:



3.3.8 Erscheint ein Attraktor während des Prozesses in der Umgebung einer Personentrajektorie, und bewirkt die Filterabbildung eine Meinungsänderung dahingehend, daß die Trajektorie instabil wird, so läuft die letztere in den Attraktor und verbleibt dort. Der Attraktor bildet also eine eingefangene Hyperfläche von den verbliebenen Personen auf I aus gesehen. Es bildet sich ein Horizont (s.vorn). Das Bild unter $\eta$ (UC I) auf E nennen wir die Meinung einer Person. Die Gesamtheit der Attraktoren (unter $\eta$ "gefiltert") nennen wir Alternativen. Aufgabe der Strategie einer Gesellschaft muß sein, Alternativen zu übertreffen. Der Vorgang der Kriterienerkennung für eine solche Strategie nennen wir Werbepsychologie.

## 3.4 Ränder und lokale und globale Strategien

Zur Veranschaulichung des Randes eines Prozesses ziehen wir eine Diskussion von Dynkin und Juskewitch [93] heran. Wir benutzen dabei ein eindimensionales Beispiel, das sich aber (wenn auch nicht straight-forward) auf den n-dimensionalen Fall verallgemeinern läßt. Anschließend werden wir noch weiter den kausalen Rand von I diskutieren und schließlich noch einige Bemerkungen über das optimale Stoppen anfügen.

3.4.1 Wir wollen einen Punkt $x \in I$ wählen und nennen die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von x aus 0 erreicht (durch Zustandsveränderung) $P(x)$. Dann gilt $P(x) = \frac{1}{2} P(x-1) + \frac{1}{2} P(x+1)$, wobei die linke Hälfte verschwindet, falls die Person nur Erhöhungen unterliegt. Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, von irgendeinem Punkt x zu einem benachbarten zu gelangen, gerade 1/2n. Dieser Fall entspricht der Irrfahrt auf einem n-dimensionalen Punktgitter [93] +).

3.4.2 Sei $P(x,B)$ die Wahrscheinlichkeit, von irgendeinem x aus I zu irgendeiner Menge $B \subset I$ zu gelangen (Gesamtheit). Dann heißt B <u>rekurrent</u>, falls $P(x,B) = 1$ für alle x und <u>transient</u>, falls $P(x,B) < 1$ für mindestens ein x. Wir bezeichnen $P_x(x(n) = y)$ mit $p(n,x,y)$, x, y Punkte aus I, und nennen $p(.)$ <u>Übergangsabbildung</u> (von einem Zustand zu einem anderen). Offenbar ist p eine Abbildung der Art $p: R \times I \times I \longrightarrow R$. Die <u>Übergangswahrscheinlichkeit</u> ist gerade $\sum_y p(n,x,y) = P_x(x(n) \in B)$, $B \subset I$ und $y \in B$.

---

+) Diese Darstellung ist noch nicht völlig invariant, auch gehen wir hier vorerst auf den diskreten Fall zurück, da hierdurch die Intention deutlicher wird.

3.4.3 Die Übergangsabbildung ist offenbar als Dichte deutbar und hängt mit der charakteristischen Funktion F(.) über das Fourier Transform zusammen. Wir schreiben

$$p(n,x,z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\theta)\, e^{-i\theta z}\, d\theta \quad .$$

3.4.4 Lemma: Es gibt zu jedem $U \subset I$ mit $P(.) = 1$ ein $t_0$, von dem an eine Person nicht mehr in U gelangt. Somit folgt, daß eine beliebige Menge $U \subset I$ transient ist.

3.4.5 Sei f ein Übergang, dann heißt der Operator, der ihm einen Erwartungswert zuordnet, so daß

$$Pf(x) = \mathbb{E}f(x(1)) = \mathbb{E}f_1 = \sum_y p(1,x,y)f(y) \ ,$$

Übergangsoperator auf I. Man zeigt, daß der zusammengesetzte Operator $A := P - 1$ mit 1 als Einheitsoperator ein diskretes Analogon darstellt zu $\frac{1}{2}\nabla^2$ .

3.4.6 Es heißt f(.) harmonisch, falls $Af = 0$ $(Pf = f)$ und superharmonisch, falls $Af \leq 0$ $(Pf \leq f)$.

3.4.7 Es heißt $B \subset I$ rekurrent, falls eine Person, die beliebig startet, mit $P(.) = 1$ unendlich oft nach B gelangt. Ist dagegen $P(.) < 1$ für irgendein x, so ist P insbesondere Null für alle x und B transient.

3.4.8 Sei f wie oben und sei definiert

$$Gf := f + Pf + P^2f + \ldots \ ,$$

dann heißt f Potential auf I im stochastischen Sinne. Es gilt zudem mit

$$g(x,y) := \sum_n p(n,x,y)$$

daß

$$Gf(x) = \sum_y g(x,y)f(y) \quad .$$

Das Potential beschreibt also den mittleren Zuwachs, der sich für die gesamte Irrfahrt seit dem Start in x ergibt (die Reinerhöhung). Setzen wir g:= Gf und nehmen wir s als Zeit des ersten Eintritts in B C I, so gilt

$$g(x) - \mathbb{E}g_s = \mathbb{E}\sum_{j=0}^{s-1} f(x(j))$$

Eine nicht-negative superharmonische Funktion nennen wir <u>exzessiv</u> [93] .

3.4.9 Wir geben jetzt der Vollständigkeit halber einige Ergebnisse an,die beispielsweise in [93] und auch [84-5] zu finden sind.

<u>Lamma</u>: Das Potential einer beliebigen nicht-negativen Funktion ist exzessiv.

<u>Satz</u>: Ist U C I transient,so gilt P(x,U) = Gf(x,U), das heißt,f ist die Wahrscheinlichkeit dafür,daß eine Person in x startet (sich in U befindend) und vom ersten Schritt an nicht mehr nach U zurückkehrt.

Ist U transient,so gibt es ein P(U) = Gf(U), $f \geq 0$, nicht aus U mit $Gf \leq 1$,das <u>Gleichgewichtspotential</u>, und

$$C(U) := \sum_{y} f(y,U)$$

heißt <u>Kapazität</u> von U.

<u>Satz</u>: Ist U zusammenhängend und endlich und gibt es zwei harmonische Funktionen $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ mit $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ auf $\partial U$, dann gilt diese Gleichheit auch auf ganz U. Insbesondere ist $\tilde{f}(x) = \mathbb{E}\, \varphi_g$ ,falls sie existiert, harmonisch auf U,so daß $\tilde{f} = \varphi$ auf $\partial U$.

<u>Korollar</u>: Zu jeder echten Untermenge U C I und zu jeder auf $\partial U$ definierten beschränkten Funktion gibt es ein g auf U harmonisch,und es gilt $\tilde{f} = \varphi$ auf $\partial U$, d.h.,das Dirichletsche Problem hat eine Lösung,die eindeutig ist,falls U endlich.

Lemma: Ist U rekurrent und f beschränkt, so ist $g(x) = \mathbb{E} f_s$ die einzige beschränkte Funktion auf U, die harmonisch ist und $g = f$ auf $\partial U$ erfüllt.

3.4.10 Das Erreichen von $A \subset I$ mit P(.) bedeutet auch Austritt aus $I \setminus A$. Sei x(t) künftig eine (diskrete) Trakektorie und s die Zeit ersten Austrittes, sowie $P(x)(s < \infty)$ die Austrittswahrscheinlichkeit. Seien $\mathfrak{H}$ beliebige Bedingungen an einen Wiener Prozeß, der x(t) beschreibt, bis zum Zeitpunkt $s > 0$, dann ist $y(t) = x(s+t)$ ein Wiener Prozeß mit der Anfangsverteilung

$$F(\partial I) = P(x)(\mathfrak{H}, x(s) \in \partial I) .$$

Dies ist die Markov-Eigenschaft an x(t).

3.4.11 Satz (starke Markov Version): Ist x(t) Wiener und s wie oben, so ist $y(t) = x(s+t), 0 < t < \infty$, bei beliebigen $\mathfrak{H}$ bis s Wiener mit $F(\partial I)$ wie eben. Alle Zeitpunkte $t_i \in$ (Entwicklung in 0,s) heißen Markovsche Zeiten.

3.4.12 Satz: Sei $f(a) = \int g(x)F(dx)$, dann genügt jedes $g(x) = \mathbb{E} f_s$, das die obige Beziehung erfüllt, der Gleichung $\nabla^2 g = 0$. Es ist $a \notin \partial I$.

Ein Punkt $a \in \partial$ heißt regulär, falls für jedes positve h

$$P_x(s > h) \to 0 \text{ für } x \to a.$$

Lemma: Jeder reguläre Randpunkt erfüllt

$$\lim_{x \downarrow a} g(x) = f(a) \quad , x(s) := a .$$

Ist $\bar{s}$ Augenblick ersten Austrittes aus einem beliebigen Gebiet G nach 0, so ist $P_a(\bar{s} = 0) = 1$, falls a regulär ist. Insbesondere kann $P(\bar{s} > 0)$ nur 0 oder 1 sein (0-1-Gesetz). Mit $m(x) = \mathbb{E} s$ genügt m der Beziehung $\nabla^2 m = -2$, deren Lösungen auf $\partial$ verschwinden.

3.4.13 Der charakteristische Operator A kann eingeführt werden in der Form

$$A\,g(x) := \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbb{E}\, g_s - g}{\mathbb{E}\, s} ,$$

und sei $r \in \partial I$, so gilt $\mathbb{E}\, s = +\infty$ und $Af(r) = 0$, falls $x = r$. Der Punkt r kennzeichnet Eigenschaften des Randes. Ist x(t) Wiener und gilt $r = 0$, so daß

$$\int (g(r=0) - g(y))P(dy) = 0 ,$$

so dagen wir, der Rand sei <u>abstoßend</u>. Man muß dabei beachten, daß der Begriff Rand hier phänomenologischer Natur ist: Ist ein Rand nämlich abstoßend, so gibt es Gebiete, in die eine Person nicht eintreten kann. Auch im Versicherungsgeschäft gibt es Versicherungen, die nicht alle Personen abschließen können, das heißt, gewisse Bereiche von I bleiben ihnen verschlossen. Wir wollen das einen <u>internen Rand</u> nennen auf I.

3.4.14 Im Rahmen unserer Betrachtung haben wir bereits drei Arten von Rändern auf I kennengelernt: Den zeitlichen Rand, der durch die endliche Lebensdauer von Personen vorgegeben ist, stets jedoch individueller Natur bliebt, den internen Rand, abhängig von bestimmten Konditionen, und den kausalen Rand, der eng mit dem Singularitätsbegriff verknüpft ist. Zu dem letzteren wollen wir noch einige Bererkungen machen.

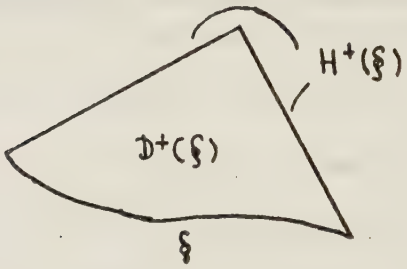
3.4.15 Sei $x \in I$, dann heißt $D^+(x)$ die <u>zukünftige Cauchy-Entwicklung</u> bezüglich x, definiert durch

$$D^+ := \{\, x \in I \mid \text{jede nicht-raumartige Kurve durch } x \text{ schneidet } \S \,\} .$$

Hierbei bedeutet § eine raumartige Hyperfläche auf I. Insbesondere gilt $D^+(\S) \subset \S$. Der Zukunftsrand von $D^+$

ist gegeben durch $H^+(\S) := D^+(\S) \setminus \dot{J}^-(D^+(\S))$, man nennt ihn den Cauchy-Horizont der Entwicklung.

3.4.16 (Cauchy Problem für I) Gegeben ein § mit Daten $(x^i)$, den Cauchy-Daten, dann fragt man nach der künftigen Evolution des Systems und bestimmt auf diese Weise einen Evolutionsoperator, eben $D^+$, wobei man $H^+$ als Bestimmungshroizont für Vorhersagen auffassen kann.




3.4.17 Sei § gegeben, dann heißt I asymptotisch vorhersagbar von §, falls

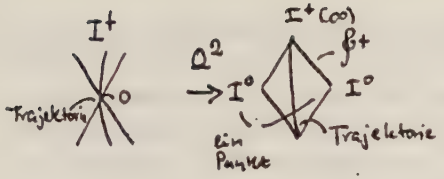
$$( \quad \mathcal{I}^+ \subset \bar{D}^+(\S)) \quad \subset \quad \hat{I} \quad ,$$

wobei $\hat{I}$ die zu I konforme Mannigfaltigkeit bedeutet: Es gibt eine Einbettung $I \xrightarrow{\Theta} \hat{I}$, so daß eine Funktion existiert, der Art

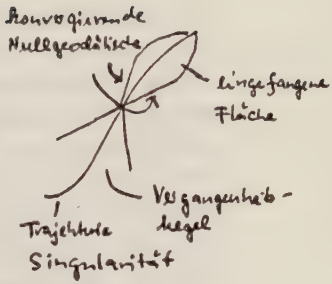
$$\Omega^2 g = \quad \Theta_* g$$

und $\Omega > 0$ auf $\Theta(I)$ und $\Omega = 0$ auf $\partial\hat{I} := \mathcal{I}$.

3.4.18 Der vormals besprochene Nullkegel nimmt nach entsprechender Identifizierung die Form eines Penrose-Diagramms an [27], insbesondere verfügt I über einen Rand, so daß Studium dieses Randes Studium des Unendlichen von I bedeutet. Auf diese Weise hat man sich einen "greifbaren" Rand verschafft, und man kann jetzt das asymptotische Verhalten von I untersuchen.




Penrose Diagramm

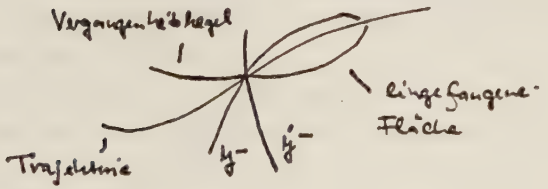



3.4.19 Satz: Ist I asymptotisch vorhersagbar von § und gilt die Konvergenzbedingung (vgl. früher), so kann eine abgeschlossene eingefangene Hyperfläche in $D^+(\S)$ nicht $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{I})$ schneiden, d.h. von $\mathcal{I}^+$ aus nicht gesehen werden. Man nennt

$$I \setminus J^-(\mathcal{I}^+, \hat{I}) := \dot{J}^-(\mathcal{I}^+, I)$$

Ereignishorizont.

Singularitäten auf I sind stets von einem Ereignishorizont umgeben, Personen treten in diesem Fall also in das kausale Komplement von I ein, das identisch ist mit dem Konkurrenzbereich.




Ereignishorizont

3.4.20 Wir wollen noch eine abschließende Bemerkung über Strategien machen. Wie bereits erwähnt, reduziert sich im einfachen Fall das Problem auf das optimale Stoppen . In dieser vereinfachten Darstellung können

wir sagen, wann eine Strategie lokal oder globale sein wird. In 3.3 wurde diese Auffassung von einem etwas invarianteren Standpunkt aus gesehen: Lokal ist eine Strategie, wenn sie auf eine Person wirkt, global ist sie auf alle Personen auf I wirkend. Eine lokale Strategie ist immer schon (lokal) optimal, falls sie eine Erhöhung des Zustandes einer Person hervorruft, eine globale ist dann optimal, wenn eine Reinerhöhung bewirkt wird (d.h. das Überschußkapital positiv ist).

Es wird möglich sein, explicite Strategien zu entwickeln, wenn man eine Art optimalen Stoppens für I derart entwickeln kann, daß eine "fließende" Korrektur für Trajektorien möglich wird. Den größten Erfolg verspricht die Untersuchung der Natur der Singularitäten auf I, dieses wird Aufgabe künftiger Arbeit sein.

Anhang A.1 Newman-Penrose Koeffizienten

Wir knüpfen hier im Rahmen des geodätischen Konzeptes an die Diskussion auf S.67 an.

A.1.1 Sei gegeben ein komplexifizierter Minkowski-Raum und ein Tetrad $(m,\bar{m},n,\ell)$ mit $n,\ell \in \tilde{R}$ und $m \in \tilde{C}$, so daß $\ell.n = -m.m = 1$. Sei ferner a ein Punkt, dann kann man nach dem Tetrad dekomponieren

$$a = p.n + q.\ell + r.m + s.\bar{m} \quad ,p,q,r,s \in \mathbb{C} .$$

Sei eine Abbildung gegeben der Art

$$f: M(I) \longrightarrow SL(2,C) ,$$

so daß $a \mapsto Aa$, wobei M(I) den betrachteten Raum bedeutet und SL(2,C) die Gruppe der 2x2 unimodularen Matrizen. Es ist A eine Matrix der Form

$$A(a) := \sqrt{2} \begin{bmatrix} a.\ell & a.\bar{m} \\ a.m & a.n \end{bmatrix}$$

A.1.2 Sei $U \in SL(2,C)$ und L(U) Lorentztransformation, so daß $L(U).a.L(U).a = a.a$ für alle $a \in M(I)$. Es gilt dann das folgende

Lemma: Seien $U_1, U_2 \in SL(2,C)$. Dann ist die Abbildung $U \rightarrow L(U)$ ein Gruppenhomomorphismus von SL(2,C) auf die Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ .

A.1.3 Sei $\sigma$ definiert als

$$\sigma = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \ell & \bar{m} \\ m & n \end{bmatrix}$$

Dann zeigt man mit der Dekomposition

$$\sigma = I\ell + \sigma_1 n + \sigma_2 m + \bar{\sigma}_3 \bar{m} ,$$

wobei I die 2x2-Einheitsmatrix und $\sigma_i$ die Paulischen Spinmatrizen bedeuten, das folgende Lemma:

$$L^{-1}(U)\,\sigma = U\,\sigma\,U^{\dagger} \quad .$$

A.1.4 Mit dem Lemma kann man Matrizen einführen, der Form $U(L_1)\,U(L_2) = \pm\, U(L_1.L_1)$, die durch die Lorentztransformationen bis auf eine Ambiguität des Vorzeichens generiert werden. In der Tat sind die U(L) eine (zweiwertige) Darstellung der Lorentzgruppe. Das gilt ebenso für die komplex konjugierten U (L). Werden nun zwei zweidimensionale komplexe Vektorräume V und $V^*$ eingeführt, so daß immer, wenn sich M(I) mit L transformiert, V und $V^*$ durch U(L) bzw. $U^*$ (L) transformiert werden, so nennen wir Elemente des V Spinoren, die des $V^*$ konjugierte Spinoren.

A.1.5 Satz: (Geroch) Läßt eine Mannigfaltigkeit eine Spinorstruktur zu, so existiert stets ein globales Tetrad.

A.1.6 Korollar: Es gibt eine Spinorbasis der Art

$$\kappa_A \mu^A = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{AB} = \kappa_A \mu_B - \mu_A \kappa_B \,,$$

wobei $\kappa, \mu$ Basisspinoren sind. Schreiben wir diese Darstellung in Dyadenform um, so bekommen wir

$$\xi_1^A = \kappa^A \quad , \quad \bar{\xi}_{1'}^{A'} = \bar{\kappa}^{A'} \,,$$

$$\xi_2^A = \mu^A \quad , \quad \bar{\xi}_{2'}^{A'} = \bar{\mu}^{A'} \,,$$

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon^{ab}\, \xi^A{}_a\, \xi^B{}_b \,,$$

$$\varepsilon_{ab} = \xi^A{}_a\, \xi^B{}_b\, \varepsilon_{AB} \,.$$

Insbesondere folgen die Ricci-Rotationskoeffizienten in Dyadform zu

$$\Gamma_{abdx'} = \xi_b{}^{\beta}\, \xi_d{}^{\delta}\, \bar{\xi}_{x'}{}^{x'}\, \nabla_{Dx'}\, \xi_{c\beta}\,.$$

Es gilt zusätzlich $\Gamma_{abdx'} = \Gamma_{badx'}$, deshalb hat man zwölf unabhängige Komponenten, die Newman-Penrose Spinkoeffizienten:

| $cd'$ \ $ab$ | $(l)$ $00$ | $01, 10$ | $(m)$ $11$ |
|---|---|---|---|
| $00'$ | $\kappa$ | $\varepsilon$ | $\pi$ |
| $10'$ | $\rho$ | $\alpha$ | $\lambda$ |
| $01'$ | $\sigma$ | $\beta$ | $\mu$ |
| $11'$ | $\tau$ | $\gamma$ | $\nu$ |

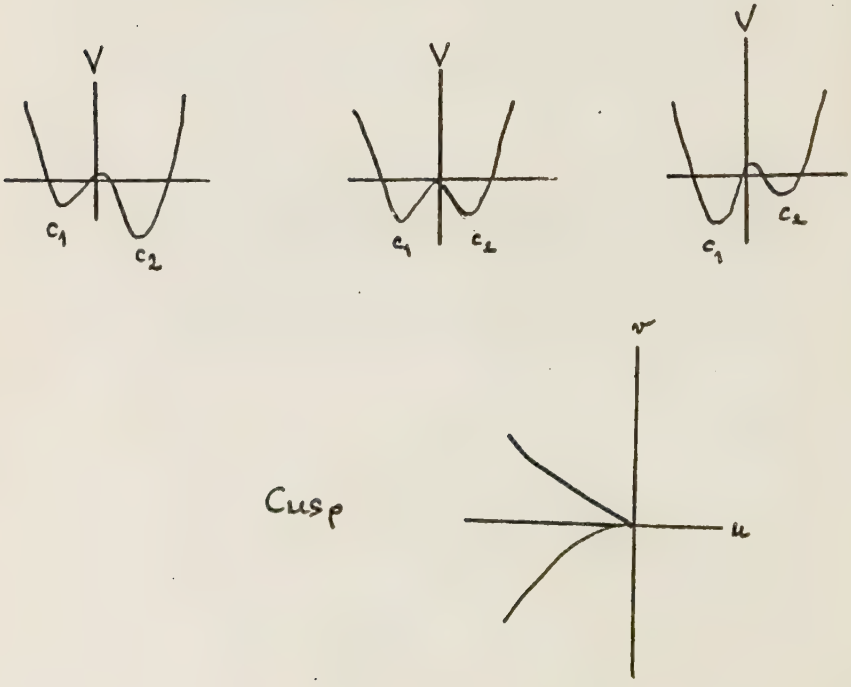
Neben der Vereinfachung der Darstellungen bei konsequenter Verwendung dieses Formalismus ergibt sich noch folgende wichtige Interpretation. Es beschreibt $\kappa$ die Krümmung der Kongruenz (von Kurven) auf I, $\rho$ die Expansion und $\sigma$ die Verformung, $\tau$ die Verdrehung.

Anhang A.2 Ansatz einer Klassifizierung von Singularitäten nach Thom

A.2.1 Die einfachste Form einer Katastrophe ist die von Riemann-Hugoniot [3] mit der universalen Auffaltung

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}u \cdot x^2 + v \cdot x$$

bezüglich x(u,v) in F. In der folgenden graphischen Darstellung sind die lokalen Potentiale in Zusammenhang gebracht mit den Positionen der universalen Auffaltung: Es sind $c_1, c_2$ zwei Attraktoren.

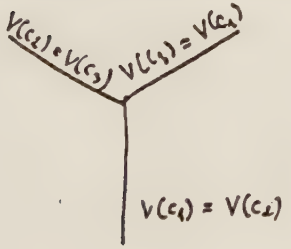


Es gibt also zwei Punkte minimalen Potentials, wobei nach der Maxwell-Konvention $V(c_1) = V(c_2)$ das Konfliktstratum definiert. Ist U das Stratum, so ist $s^{-1}U$ der freie Rand einer Schockwelle, die zwei Einflußdomainen (regimes) trennt, durch stetige Differentiation einer Domaine. Überings entspricht der (stabile) Cusp-Punkt der ebenfalls stabilen cuspialen Struktur einer Kaustik in der kaassischen Optik. Auch die Bildung einer eingefangenen Hyperfläche bei (geodätischen) Singularitäten kann als Kaustik aufgefaßt werden.

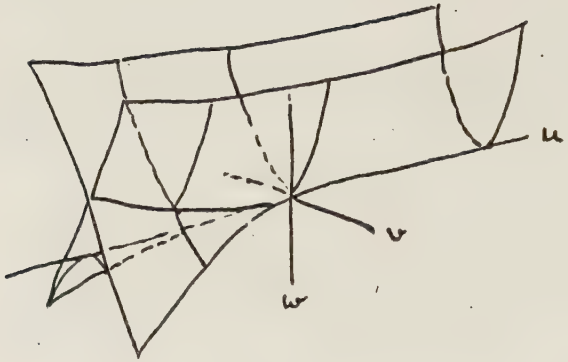
A.2.2 Eine andere Form des Konfliktstratums entsteht, wenn drei Domainen miteinander in Wettbewerb stehen. Es ist dies (wie eben) ein (lokales) Stratum der Kodimension zwei. Für die Potentiale gelten die Bedingungen

$$V(c_1) = V(c_2) < V(c_3) \quad , \; V(c_2) = V(c_3) < V(c_1),$$
$$V(c_3) = V(c_1) < V(c_2) \; .$$

Das Bild von $s^{-1}U$ definiert eine Tripleecke, die die gemeinsame Grenze dreier Konfliktstrata darstellt.

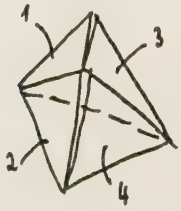



A.2.3 (Schwalbenschwanz) Eine Singularität von $R^3 \to R$ mit Auffaltung $V = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}v.x^2 + w.x$ ergibt eine graphische Darstellung auf die folgende Weise (für eine künstlerisch gelungenere Darstellung vgl. [3] ):




Eines der Cusps im Dreieck des Schwalbenschwanzes definiert eine Riemann-Hugoniot Katastrophe, deshalb gibt es dort eine Schockwelle, die zwei Domainen trennt, beim Cusp startend und beim Doppelpunkt der Sektion oder in dessen Umgebung (auf einer Faltungslinie) endend.

A.2.4 Transitionsstrata (in zeitlicher Evolution) beschreiben ein System von Konfliktstrata mit vier Wettbewerbsdomainen:



A.2.5 Katastrophen vom Korang zwei für ein Potential $F \rightarrow R$ mit Rang n-2 definieren Singularitäten vom Nabeltyp. Die Mather Theorie [4] liefert als universale Auffaltung

$$V = Q(x,y) - u.x - v.y + w.g(x,y),$$

wobei man entsprechend spezifizierter Q und g hyperbolische Nabel von elliptischen unterscheidet. Die graphische Darstellung des letzteren ist

Eine parabolische Nabelsingularität hat in graphischer Darstellung die folgende Form:

Die letzte Darstellung erklärt überings als Nebenprodukt die Bergtheorie (ein steiler und ein flacher Abhang). Nabelsingularitäten lassen eine interessante Interpretation zu für den Wettbewerb: Zerspaltet eine Gesellschaft, so daß sich eine Tochtergesellschaft bildet, kann dieses Ereignis Prozesse auf I dadurch stören, daß sich unterschiedliche Wettbewerbsbedingungen ergeben.

Literaturverzeichnis

Dieses Verzeichnis listet neben den aktuellen Literaturnachweisen im Text noch zusätzliche Quellen,die während des allgemeinen Literaturstudiums auf die eine oder andere Art mehr oder weniger der Information dienten. Die Bezifferung ist durchgehend beibehalten,so daß sich eine Einordnung in Themenkreise ergibt.

(1) Differentialgeometrie und Topologie, Mannigfaltigkeiten und Dynamische Systeme


1 Brickell,F. und Clark,R.S.: Differentiable Manifolds,Van Nostrand Reinhold London 1970

2 Manifolds,Proc.Nuffic Summer School Amsterdam 1970 LNM 197 (1971) Springer

3 Thom,R.: Strucutural Stability and Morphogenesis Benjamin 1975

4 Golubitsky,M. und Guillemin,V.: Stable Mappings and Their Singularities,GTM Springer 1973

5 Proceedings of Liverpool Singularities, LNM 192 (1971) Springer

6 Global Differentiable Dynamics,Proc.Western Reserve 1969 ibid.,LNM 235 (1971) Springer

7 Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems,Warwick University 1968/69,LNM 206 (1971)

8 Smale,S.: Global Analysis and Economics,in: Dynamical Systems,Peixoto (ed.),Acadamic Press 1973

9 Bartlett,M.S. und Hiorns,R.W.: (ed.) Mathematical Theory of the Dynamics of Biological Populations Academic Press 1974

10 Misner,C. und Wheeler,J.A.: Ann.Phys. 2 (1957),525

11 Flaschel,P. und Klingenberg,W.: Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten,LNM 282 (1972) Springer

12 Abraham,R. und Marsden,J.E.: Foundations of Mechanics, Benjamin 1967

13 Sussmann,H.J.: Catastrophe Theory,Synthese 31 (1975)

14 Holmann,H. und Rummler,H.: Alternierende Differentialformen, B.I. 1972

15 Beck,A.: Continuous Flows in the Plane,Springer 1974

16 Global Analysis and Applications,ICPT Seminar 1972, by IAEA Wien 1974

17 Hirsch,M.W.: Differential Topology GTM Springer 1976

18 Kobayashi,S. und Nomizu,K.: Foundations of Differential Teometry,Interscience 1963

19 Souriau,J.M.: Structure des Systèmes Dynamiques Dunod Paris 1970

20 Dieudonné,J.: Grundzüge der modernen Analysis Vieweg 1976

21 Cole,M.: On Causal Dynamics without Metrization in: Topological Dynamics,Auslander-Gottschalk (ed.), Benjamin 1968

22 Géroch, .: J.Math.Phys. 8 (1967),9 (1968),11 (1970)

23 Hawking,S. und Ellis,G.F.R.: The Large Scale Structure of Space Time,C.U.P. 1973

24 Breuer,R.A.: Gravitational Perturbation Theory LNP 44 Springer 1975

25 Methods of Local and Global Differential Geometry, Pittsburgh Proc. 1970,LNP 14 (1972) Springer

26 Flaherty,E.J.: Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity,LNP 46 (1976) Springer

27 Gromoll,D. et al.: Riemannsche Geometrie im Großen LNM 55 (1968) Springer

(2) Versicherungstheorie und Versicherungsmathematik


28 Wolff,K.H.: Versicherungsmathematik
Springer Wien 1970

29 Wolff,K.H.: Ein Beitrag zur Theorie der Ruinwahrscheinlichkeit,Mon.Math. 71 (1),64-79 (1967)

30 Wolff,K.H.: Methoden der Unternehmensforschung im Versicherungswesen,Springer 1966

31 Schneeweiß,H.: Entscheidungskriterien bei Risiko
Springer 1967

32 Stenner,F.: Bedeutung des Risikogeschäftes als finanzwirtschaftliches Entscheidungsmodell
Z.Ges.Vers.-wirtsch. 1/2 (1976)

33 Beard,R.E. et al.: Risk Theory
Methuen's Monograph London 1969

34 Seal,H.L.: Sc.Ac.J. (1974),121-139

35 Blackwell,D.: Ann.Math.Stat. 33 (1962),719-26

36 Gerber,H.: VSVM 69 (1969),186-227

37 Morill,J.: unpublished thesis, Michigan U. 1964

38 Philipson,C.: ASTIN Bull. 1 (1) 1958,32-41

39 Bichsel,F.: ibid. 1 (3) 1960,106-112

40 Philipson,C.: ibid. 1 (4) 1960,224-237

41 Borch,K.: ASTIN Bull. 1 (5) 1961,245-255

42 Philipson,C.: ibid. 256-264

43 Kahn,P.M.: ibid. 265-272

44 Banasinski,A. und Wanatowski,A.: ibid. 2 (1) 1962,5-8

45 Benckert,L.-G.: ibid. 9-23

46 Benktander,G.: ibid. 24-29

47 Banasinski,A.: ibid. 77-83

48 Campagne,C.: ibid. 2 (2) 1962,222-240

49 Vajda,S.: ibid. 257-260

50 Beard,R.E.: ibid. 3 (1) 1963,6-12

51 Philipson,C.: ibid. 20-42

52 Kupper,J.: ibid. 85-103

53 de Finetti,B.: ibid. 3 (2) 1964,116-131

54 Bühlmann,H.: ibid. 144-152

55 Philipson,C.: ibid. 3 (3) 1965,215-238

56 de Mori,B.: ibid. 286-313

57 Wolff,K.H.: ibid. 4 (1) 1966,6-10

58 Thyrion,P.:ibid. 4 (2) 1967,87-105

59 Kupper,J.: ibid. 106-119

60 Pesonen,E.: ibid. 120-128

61 Almer,B.: ibid. 136-169

62 Philipson,C.: ibid. 191-2

63 Borch,K.: ibid. 5 (1) 1968,118-132

64 Borch,K.: ibid. 5 (2) 1969,280-292

65 Anantapadmanabhan,C.S.: ibid. 5 (3) 1971,307-313

66 Philipson,C.: ibid. 328-373

67 Bühlmann,H. und Buzzi,R.: ibid. 6 (1) 1971,42-46

68 Thyrion,P.: ibid. 47-53

69 Thorin,O.: ibid. 54-65

70 Beard,R.E.: ibid. 6 (2) 1971,129-133

71 Borch,K.: ibid. 153-156

72 Kupper,J.: ibid. 134-146

73 Thorin,O.: ibid. 108-115

74 Grandell,J.: ibid. 116-128

75 Delaporte,P.J.: ibid. 6 (3) 1972,185-190

76 Grandell,J.: ibid. 7 (1) 1972,100-1

77 Franckx,E.: ibid. 7 (2) 1973,103-118

78 Borch,K.: ibid. 7 (3) 1974,192-202

79 Frisque,A.: ibid. 8 (1) 1974,57-65

80 von Lanzenauer,C.H. und Lundberg,W.N.: ibid. 91-103

81 Thorin,O.: ibid. 8 (1) 1974,104-125

82 Beard,R.E.: ibid. 8 (3) 1975,265-271

83 Pesonen,E.: ibid. 359-363

(3) Theorie der Stochastischen Prozesse

84 Feller,W.: Probability Theory and Applications Wiley 1968 und 1975

85 Gikhman,I.I. und Skorokhod,A.V.: Theory of Random Processes, Saunders 1969

86 Revuz,D.: Markov Chains,North Holland 1975

87 Tortrat,A.: Calcul des Probabilités,Masson 1971

88 Harding,E.F. und Kendall,D.G.: (ed.) Stochastic Geometry,Wiley 1974

89 Ito,K. und McKean,H.P.: Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer 1965

90 Gikhman,I.I. und Skorokhod,A.V.: Stochastic Differential Equations, Springer 1972

91 Meyenburg,C.: Unendlich-dimensionales Filtern I unpublished seminar TU Berlin SS 1976

92 Athreya,K.B. und Ney,P.E.: Branching Processes Springer 1972

93 Dynkin,E.B. und Juskewitch,A.A.: Markov Prozesse HTB Springer 1969

94 Sewastjanov,B.A.: Verzweigungsprozesse Oldenbourg 1975

(4) Ökonometrie und Operations Research

95 Neumann,J.v. und Morgenstern,O.: Spieltheorie und writschaftliches Verhalten 1961

96 Samuelson,P.A. Economics
Mc Graw Hill Kogakusha 1973

97 Dhrymes,P.J.: Econometrics
Springer Study Edition 1974

98 Debreu,G.: Theory of Value,Wiley 1962

99 Borch,K.: ASTIN Bull. 2 (2) 1962,208-221

100 Borch,K.: ASTIN Bull. 2 (3) 1963,322-342

101 Borch,K.: ASTIN Bull. 4 (3) 1967,252-264

102 Neuburger,E. und v. Chossy,R.: Bl. DGVM 12 (4) 1976

103 Beckmann,M. und Künzi,H.P.: Mathematical Systems Theory and Economics, Proc. Varenna Summer School LNORME 11 (1969) Springer

104 Bühlmann,H. et al.: Entscheidungs-und Spieltheorie Springer 1975

105 Keynes,J.M.: The General Theory of Employment, Interest and Money, RES 1973 by Macmillan London

106 Beckmann,M.J. und Sato,R.: (ed.) Mathematische Wirtschaftstheorie, Kiepenheuer und Witsch 1975

107 Dierker,E.: Topological Methods in Walrasian Economics, LNEMS 92 Springer 1974

108 Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics LNEMS 133 Springer 1976

Curriculum Vitae

Rainer Ernst Zimmermann, geboren am 9.November 1951 in Berlin-Tempelhof als einziges Kind des BVG-Angestellten Gerhard Zimmermann und seiner Frau Erna, geb. Podzeweit. Nach dem Besuch der Havelland Grundschule in Berlin-Schöneberg und des Robert Blum Gymnasiums ebenda, im Januar 1971 Abitur und im anschließenden Sommersemester Studiumsbeginn am Fachbereich Physik der Technischen Universität Berlin. Nach dem Vordiplom im Februar 1973 Studium am Imperial College London als DAAD-Stipendiat. Prüfung zum D.I.C. in Mathematischer Physik (M.Sc-Äquivalenz und deutsche Promotionsberechtigung) im Juni 1974. Nach Rückkehr Studium an der Freien Universität Berlin und Hauptdiplom in Theoretischer Physik im März 1975. Anschließend tätig als Doktorand für Angewandte Mathematik und seit Mai 1976 auch als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Physikalisch Technischen Bundesanstalt Berlin.

Dissertationsdruck Fred Höpfner
Pestalozzistr. 106 (Ecke Wiesbadener) 1 Berlin 12
312 88 85
313 81 98